Sujet n°5

Une puce se déplace aléatoirement sur les arêtes d'un cube ABCDEFGH, d'un sommet à un autre. A chaque station, elle choisit la station suivante parmi les trois sommets adjacents au sommet où elle se trouve. Le choix s'effectue de façon équiprobable et indépendante du trajet déjà effectué. Au départ la puce se trouve au point A. Déterminer pour n entier naturel non nul, la probabilité p_n pour que le premier retour en A s'effectue à l'issue de la $(2n)^{\text{ième}}$ étape.

Solution

On partitionne maintenant les sommets du cube en quatre ensembles :

$$X = \{A\},\ Y = \{B, D, E\},\ Z = \{C, F, H\},\ T = \{G\}$$

La probabilité pour la puce de passer d'un sommet de X à un sommet de Y vaut 1.
La probabilité pour la puce de passer d'un sommet de Y à un sommet de X vaut 1/3.
La probabilité pour la puce de passer d'un sommet de Y à un sommet de Z vaut 2/3.
La probabilité pour la puce de passer d'un sommet de Z à un sommet de Y vaut 2/3.
La probabilité pour la puce de passer d'un sommet de Z à un sommet de T vaut 1/3.
La probabilité pour la puce de passer d'un sommet de T à un sommet de Z vaut 1.

On a :

$p_1 = 1/3$ (la puce passe de X à Y puis de Y à X).

$p_2 = 1\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$ (la puce passe de X à Y puis de Y à Z puis de Z à Y puis de Y à X).

$p_3 = \frac{1}{3}\times 1\times p_2+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times p_2 = \frac{7}{9}p_2 = \frac{7}{9}\times\frac{4}{27}$ (en tenant compte d'un aller et retour en plus de Z à T ou de Y à Z).

Puis pour n supérieur à 3 on a la relation de récurrence $p_n = \frac{7}{9}p_{n-1}$ caractéristique d'une suite géométrique de raison 7/9. On a donc $p_n = \frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-2}$.

En sommant les p_n on obtient 1 ; la puce retournera donc presque sûrement sur le sommet A en continuant ainsi son errance sur les sommets du cube.

On peut aussi calculer le nombre moyen d'étapes nécessaires à ce premier retour en A qui est de 8 en sommant les $2n\ p_n$