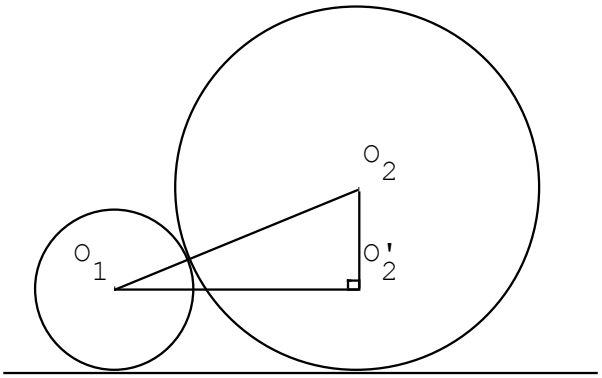
Le problème de la quinzaine

Problème n°11 : Un joli sangaku

Solution

Dans la configuration ci-contre les deux cercles et la droite sont mutuellement tangents. On note R_1 et R_2 respectivement les rayons des cercles de centres O_1 et O_2.

On a l'égalité : $O_1O_2' = 2\sqrt{R_1R_2}$ **(1)** car, d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle $O_1O_2O_2'$, rectangle en O_2', on a $O_1O_2' = \sqrt{(R_1+R_2)^2-(R_2-R_1)^2}$ (le point de contact des deux cercles est aligné avec O_1 et O_2).

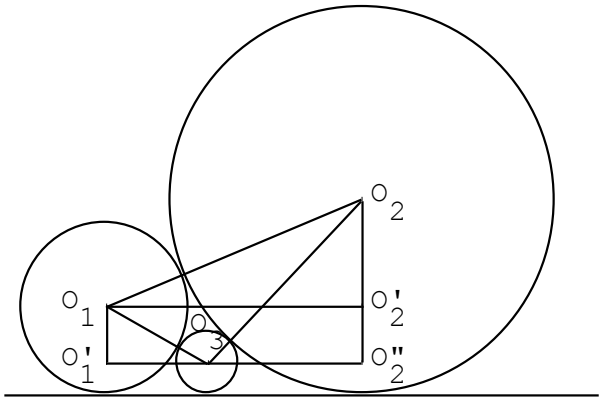


Dans la configuration ci-contre les trois cercles et la droite sont mutuellement tangents. On garde les mêmes notations qu'auparavant et on note de plus R_3 le rayon du cercle de centre O_3.

On applique l'égalité **(1)** successivement aux cercles de centres O_1 et O_3, puis aux cercles de centres O_3 et O_2 et enfin aux cercles de centres O_1 et O_2. Cela donne :

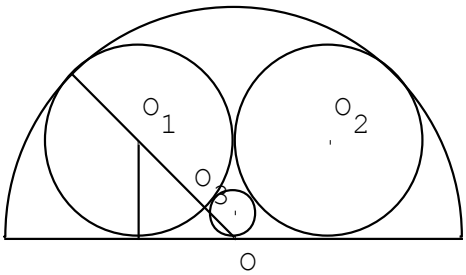
$O_1'O_3 = 2\sqrt{R_1R_3}$, $O_3O_2'' = 2\sqrt{R_3R_2}$ et

$O_1O_2' = 2\sqrt{R_1R_2}$.



En observant que $O_1O_2' = O_1'O_2'' = O_1'O_3 + O_3O_2''$ on obtient : $\sqrt{R_1R_2} = \sqrt{R_1R_3} + \sqrt{R_3R_2}$.

En divisant les deux membres de l'égalité par $\sqrt{R_1R_2R_3}$ on a : $\dfrac{1}{\sqrt{R_3}} = \dfrac{1}{\sqrt{R_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{R_2}}$.

On sait que la moyenne arithmétique de deux nombres positifs est supérieure ou égale à leur moyenne géométrique, avec égalité quand ces deux nombres sont égaux. On a donc l'inégalité : $\sqrt{R_3} = \dfrac{2\left(\sqrt[4]{R_1R_2}\right)^2}{2(\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2})} \le \dfrac{\sqrt[4]{R_1R_2}}{2}$ ou encore en élevant au carré : $R_3 \le \dfrac{\sqrt{R_1R_2}}{4}$ avec égalité quand $R_1 = R_2$.

Dans la configuration proposée par l'énoncé, quand $R_1 = R_2$ on a : $4 = R_1 + \sqrt{2}\,R_1$ et donc $R_1 = 4(\sqrt{2}-1)$, auquel cas R_3 vaut $\sqrt{2}-1$ qui est alors la valeur maximale que peut atteindre ce rayon.