

Enoncé n°8.

On considère n nombres réels $u_1, u_2, \dots, u_n$ ($n \geq 2$) strictement positifs vérifiant l'égalité suivante : $\frac{1}{2012+u_1} + \dots + \frac{1}{2012+u_n} = \frac{1}{2012}$ (1).

Trouver le plus grand entier naturel m tel que : $\prod_{i=1}^n u_i \geq m$.

Solution.

Mettons l'expression donnée sous la forme : $\frac{1}{1+\frac{u_1}{2012}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{u_n}{2012}} = 1$ et posons

$w_i = \frac{1}{1+\frac{u_i}{2012}}$ pour tout entier naturel i compris entre 1 et n . On a d'une part $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ avec w_i

appartenant à l'intervalle ouvert $]0; 1[$ et d'autre part $u_i = 2012 \frac{1-w_i}{w_i}$.

On a les égalités : $\prod_{i=1}^n u_i = 2012^n \prod_{i=1}^n \frac{1-w_i}{w_i} = 2012^n \prod_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{w_j}{w_i}$.

D'après l'inégalité arithmético-géométrique on sait que :

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{w_j}{w_i} \geq (n-1) \left(\prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{w_j}{w_i} \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

et donc on a :

$$\prod_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{w_j}{w_i} \geq (n-1)^n \prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{w_j}{w_i} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Mais $\prod_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{w_j}{w_i} = 1$, d'où $\prod_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{w_j}{w_i} \geq (n-1)^n$ et finalement $\prod_{i=1}^n u_i \geq 2012^n (n-1)^n$ avec

égalité quand les u_i sont tous égaux à $2012(n-1)$, ce qui correspond bien à une solution de (1). La quantité m cherchée vaut donc $[2012(n-1)]^n$.

