

Solution proposée par Frédéric de Ligt au problème de la quinzaine n°11

On note tout d'abord a_1 la longueur du côté du carré ABCD, a_2 celle du côté du carré AMGH et a_3 celle du côté du carré JKLC.

Une première remarque qui va être utilisée plusieurs fois par la suite : une médiane partage un triangle en deux triangles de même aire.

La rotation, dans le sens trigonométrique d'angle 90° et de centre D, du triangle DML amène L en E et M en un nouveau point M' ; le triangle FEM' est alors partagé en deux triangles de même aire par la médiane [DE]. Donc les triangles DML et DEF ont la même aire.

A l'aide d'une rotation dans le sens trigonométrique de 90° et de centre A, on déduit que les triangles AHB et ADM ont la même aire.

A l'aide d'une rotation dans le sens trigonométrique d'angle 90° et de centre C, on déduit que les triangles CBJ et CLD ont la même aire. Par ailleurs les triangles BAH et BJC sont isométriques et leur aire commune vaut $\frac{1}{2} a_2 \times a_3$.

On évalue maintenant l'aire du pentagone GKLDM de deux façons.

Première façon

Il est constitué de trois carrés et de quatre triangles de même aire. Son aire prend alors la forme :

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2 \times a_2 \times a_3.$$

Seconde façon

Il est constitué d'un trapèze rectangle GKLM et du triangle MLD. Son aire prend alors la forme :

$$(a_2 + a_3)^2 + \text{aire (FED)}.$$

En identifiant les deux expressions de l'aire du pentagone GKLDM il vient alors que l'aire du triangle FED vaut a_1^2 c'est-à-dire l'aire du carré ABCD.

