Solution du problème numéro 3 de la quinzaine proposée par Frédéric de Ligt

Notons E_n l'évènement : obtenir 2 « Face » à la suite après n lancers et Card(E_n) le nombre de façons de réaliser cet évènement. On a Card(E_1) = 0 ; Card(E_2) = 1 avec le tirage FF ; Card(E_3) = 1 avec le tirage PFF. Pour n > 2, E_n est la réunion disjointe des deux évènements suivants :

A_n : obtenir 2 « Face » à la suite après n lancers et le premier lancer donne « Pile » ;

B_n : obtenir 2 « Face » à la suite après n lancers et les deux premiers lancers donnent « Face » puis « Pile ».

On a Card(A_n) = Card(E_{n-1}) et Card(B_n) = Card(E_{n-2}), d'où Card(E_n) = Card(E_{n-1}) + Card(E_{n-2}).

Il est clair que Card(E_n) = F_{n-1} où (F_n) est la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Comme il y a 2^n issues possibles pour n lancers, la probabilité de voir se réaliser E_n est $F_{n-1}/2^n$.

Le nombre moyen M de lancers nécessaires pour obtenir deux « Face » consécutifs est $\sum_{n\geq 1} n\frac{F_{n-1}}{2^n}$. Utilisons la formule de Binet : $F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\varphi'^n}{\sqrt{5}}$ où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or) et $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$$M = \sum_{n\geq 1}\frac{n}{\sqrt{5}}\frac{\varphi^{n-1}}{2^n} - \frac{n}{\sqrt{5}}\frac{\varphi'^{n-1}}{2^n} = \sum_{n\geq 1}\frac{n}{2\sqrt{5}}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^{n-1} - \frac{n}{2\sqrt{5}}\left(\frac{\varphi'}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{\varphi}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n\geq 1} n\left(\frac{\varphi'}{2}\right)^{n-1}\right).$$

Comme pour $|q|<1$ on a $\sum_{n\geq 1} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ (une démonstration élémentaire est proposée en annexe), alors

$$M = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{(1-\frac{\varphi}{2})^2} - \frac{1}{(1-\frac{\varphi'}{2})^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\frac{(1-\frac{\varphi'}{2})^2-(1-\frac{\varphi}{2})^2}{\left[(1-\frac{\varphi}{2})(1-\frac{\varphi'}{2})\right]^2}.$$

On utilise les relations suivantes pour simplifier cette dernière expression : $\begin{cases}\varphi+\varphi'=1\\ \varphi\varphi'=-1\\ \varphi-\varphi'=\sqrt{5}\end{cases}$ et

On aboutit après quelques calculs simples à M = 6.

Il faut donc compter 6 lancers en moyenne avant d'obtenir la sortie de deux « Face » à la suite.

Annexe

Pour $|q|<1$ et pour tout entier N non nul on a :

$$(1-q)\sum_{n=1}^{N} nq^{n-1} = \sum_{n=1}^{N} nq^{n-1} - \sum_{n=1}^{N} nq^n = \sum_{n=0}^{N-1}(n+1)q^n - \sum_{n=1}^{N} nq^n = 1+\sum_{n=1}^{N-1} q^n - Nq^N = \frac{1-q^N}{1-q} - Nq^N.$$

Comme $\lim_{N\to+\infty} Nq^N = \lim_{N\to+\infty}\frac{q^N}{1-q} = 0$, on obtient $\lim_{N\to+\infty}(1-q)\sum_{n=1}^{N} nq^{n-1} = \frac{1}{1-q}$ et finalement

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$