Sujet n°18

Montrer que quels que soient les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ on a :

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \cos^2(x_i - x_j) \ge \frac{n(n-2)}{4}$$

Solution

L'inégalité

Pour $n \ge 2$ on a : $\sum_{1 \le i < j \le n} \cos^2(x_i - x_j) = \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{1 + \cos 2(x_i - x_j)}{2} = \frac{n(n-1)}{4} + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le n} \cos 2(x_i - x_j)$.

Par ailleurs $(\sum_{i=1}^{n} \cos 2x_i)^2 + (\sum_{i=1}^{n} \sin 2x_i)^2 = n + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \cos 2(x_i - x_j) \ge 0$ et donc $\sum_{1 \le i < j \le n} \cos 2(x_i - x_j) \ge \frac{-n}{2}$ et on a finalement $\sum_{1 \le i < j \le n} \cos^2(x_i - x_j) \ge \frac{n(n-1)}{4} - \frac{n}{4} = \frac{n(n-2)}{4}$.

Cas d'égalité

On a $\sum_{1 \le i < j \le n} \cos^2(x_i - x_j) = \frac{n(n-2)}{4}$ si et seulement si $(\sum_{i=1}^{n} \cos 2x_i)^2 + (\sum_{i=1}^{n} \sin 2x_i)^2 = 0$ ou encore si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} \cos 2x_i = \sum_{i=1}^{n} \sin 2x_i = 0$.

Pour réaliser cette double égalité on peut prendre $x_i = \frac{\pi(i-1)}{n}$ pour *i* compris entre 1 et *n*.

En effet, comme $(e^{\frac{i2\pi}{n}} - 1)(\sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{i2\pi}{n}})^k) = e^{i2\pi} - 1 = 0$, on a $\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{i2\pi k}{n}} = 0$ et donc $\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{2\pi(i-1)}{n} = \sum_{i=1}^{n} \sin \frac{2\pi(i-1)}{n} = 0$.

Identités trigonométriques utilisées

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.