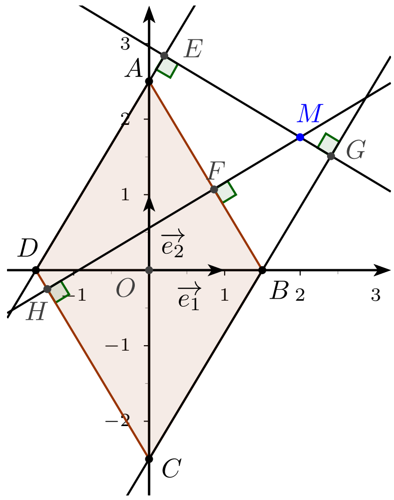
PROBLÈME 3



L'affixe de chaque point sera notée en minuscule. On note $(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BA}}) \equiv \theta\,(2\pi)$, avec $\theta \neq 0\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
On utilise alors l'écriture complexe d'une réflexion[1] s pour obtenir celle du projeté comme milieu de $[M, s(M)]$. On obtient, en remarquant que $d = -b$:

$$f = \frac{m + e^{i2\theta}(\overline{m} - b) + b}{2} \qquad , \qquad e = \frac{m + e^{-i2\theta}(\overline{m} + b) - b}{2}$$

$$h = \frac{m + e^{i2\theta}(\overline{m} + b) - b}{2} \qquad , \qquad g = \frac{m + e^{-i2\theta}(\overline{m} - b) + b}{2}$$

Clairement, $(E \neq G)$, $(F \neq H)$, $(E = F \Leftrightarrow M = A)$, $(G = F \Leftrightarrow M = B)$, $(G = H \Leftrightarrow M = C)$ et $(E = H \Leftrightarrow M = D)$.
On peut donc d'ores et déjà dire :
si $M \in \{A, B, C, D\}$, alors deux des quatre projetés sont confondus et de telles positions de M répondent au problème.
En revanche, si $M \notin \{A, B, C, D\}$, alors les quatre projetés sont deux à deux distincts et non alignés d'où, en utilisant le birapport sous ces conditions :

$$\begin{aligned}
E, F, G, H \quad \text{cocycliques} &\Leftrightarrow (f - h)\,(g - e)\,\overline{(f - e)(g - h)} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \underbrace{b\left(1 - e^{i2\theta}\right).b\left(1 - e^{-i2\theta}\right)}_{\in \mathbb{R}^*}(b - b\cos 2\theta - im\sin 2\theta)\,(b - b\cos 2\theta + im\sin 2\theta) \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow m^2\,(\sin 2\theta)^2 \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow m^2 \in \mathbb{R} \quad (\text{puisque } \sin 2\theta \neq 0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ \text{ou} \\ \sin 2\alpha = 0 \quad (\text{où } \alpha \text{ est un argument de } m) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ \text{ou} \\ \alpha \equiv 0\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{E, F, G, H \text{ cocycliques} \Longleftrightarrow M \in (AC) \cup (BD)}$$

1. Pour la réflexion d'axe $(B, \overrightarrow{BA})$, on remarque que $s_{\left(B,\overrightarrow{BA}\right)} \circ s_{(O,\overrightarrow{e_1})} = r_{B,2\theta}$, soit $s_{\left(B,\overrightarrow{BA}\right)} = r_{B,2\theta} \circ s_{(O,\overrightarrow{e_1})} \cdots$