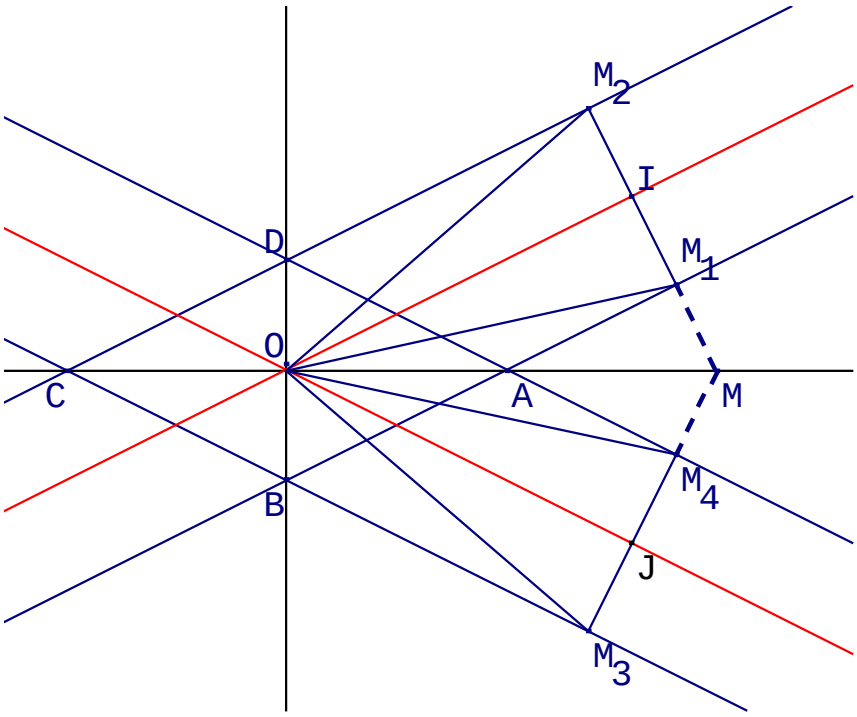
Problème de la quinzaine numéro 3 : Comment faut-il choisir un point M du plan pour que ses projections orthogonales sur les quatre côtés d'un losange soient cocycliques ?

Solution

On note O le centre d'un losange ABCD. Soit M un point du plan. On note respectivement M1, M2, M3 et M4 les projetés orthogonaux de M sur (AB), (CD), (BC) et (AD). La nature du problème impose qu'au moins trois de ces points soient distincts.

Si les quatre points sont cocycliques, il existe alors un **unique** point O' qui est le centre du cercle circonscrit à ces quatre points. On a en particulier O'M1 = O'M2 et donc O' se situe sur la médiatrice du segment [M1M2]. De même O'M3 = O'M4, et O' se situe aussi sur la médiatrice du segment [M3M4]. O' est donc confondu ave le centre O du losange. En fait on doit avoir OM1 = OM2 = OM3 = OM4. Les triangles OM1M2 et OM3M4 sont deux triangles isocèles isométriques (ces deux triangles peuvent tous deux dégénérer en deux segments de même longueur dont O est le milieu commun quand M est en O). Si on note I le milieu de [M1M2] et J le milieu de [M3M4], on a alors OI = OJ. Si M n'est pas en O, les deux triangles rectangles OIM et OJM existent et sont isométriques. M est donc placé sur la bissectrice de $\widehat{IOJ}$. M peut finalement se situer sur une des deux droites portant les diagonales du losange.

Inversement, si M est situé sur une des droites portant les diagonales du losange, y compris en O, on a facilement que les quatre points M1, M2, M3 et M4 sont sur un même cercle centré en O.