Correction de l'énigme "Nombres chanceux "

On écrit la liste des entiers de 1 à n, où $n \geqslant 3$.
On raye un nombre sur deux.
De la liste restante, on raye un nombre sur trois.
De la liste restante, on raye un nombre sur quatre.
On recommence : on raye un nombre sur deux, on raye un nombre sur trois, on raye un nombre sur quatre, etc. …
Si lors d'une opération, on n'a pas rayé de nombre, on s'arrête.
Les nombres "chanceux", s'il existent, sont ceux qui restent alors en dehors du 1.

a. *Pour tout $n \geqslant 3$, existe-t-il au moins un nombre chanceux* ?

On n'aura pas de nombre chanceux s'il reste deux nombres et que l'on est à l'étape " On raye un nombre sur deux ".
Or ceci est impossible, car à l'étape précédente, on a rayé un nombre sur quatre. Donc il reste au moins trois nombres.

Donc quelque soit $n \geqslant 3$, **il existe au moins un nombre chanceux**.

b. *Quel est le nombre maximum de nombres chanceux* ?

* Pour n = 7. On écrit la liste : 1 2 3 4 5 6 7
On raye un nombre sur deux, donc il reste : 1 3 5 7.
On raye un nombre sur trois, donc il reste : 1 3 7.
On raye un nombre sur quatre. Impossible car il reste seulement trois nombres.
Donc on a pour n = 7, deux nombres chanceux : 3 et 7.

* Peut-on avoir 3 nombres chanceux ?
Impossible ! Car cela veut dire que dans la liste il reste 4 nombres (le 1 et les trois autres) et donc quelque soit l'étape de l'algorithme, on pourra rayer un nombre de la liste ….

* *Conclusion* : **quelque soit $n \geqslant 3$, on aura 1 ou 2 nombres chanceux**.

c. *Pour n = 2012, quel(s) est (sont) le(s) nombre(s) chanceux* ?

Pour n = 2012, on a un seul nombre chanceux : **1537**.

Remarques : * Pour éviter de passer trop de temps pour trouver les nombres chanceux, on peut programmer l'algorithme donné …

* En testant (grâce au programme) toutes les valeurs de **n** allant de 3 à 2012, on trouve les nombres chanceux suivants : 3 ; 7 ; 25 ; 97 ; 385 ; 1537 ; …

* On peut donc conjecturer que la liste des nombres chanceux est donnée par :
$a_0 = 3$, $a_1 = 7$ et pour $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 4a_n - 3$.