Corrigé du sujet n° 2

La longueur d'une corde $[AB]$ et l'angle $\theta \in [0, \pi]$ qui intercepte $[AB]$ sont liés par la relation : $2R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = AB$. On note θ_1, θ_2 et θ_3 les angles intercepteurs des cordes de longueurs respectives 2, 7 et 11. La condition nécessaire et suffisante cherchée est que la somme des six longueurs d'arcs de cercles est égale à $2\pi R$ ie $2R\theta_1 + 2R\theta_2 + 2R\theta_3 = 2\pi R$. On a :

$$2R\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = 2 \qquad 2R\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) = 7 \qquad 2R\sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right) = 11.$$

Nécessairement $R \geqslant \frac{11}{2}$. Pour $R \geqslant \frac{11}{2}$ on exprime les angles en fonction du rayon R :

$$\theta_1 = 2\arcsin\left(\frac{2}{2R}\right) \qquad \theta_2 = 2\arcsin\left(\frac{7}{2R}\right) \qquad \theta_3 = 2\arcsin\left(\frac{11}{2R}\right).$$

On obtient ainsi les équations suivantes :

$$\begin{aligned} 2R\theta_1 + 2R\theta_2 + 2R\theta_3 &= 2\pi R \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 &= \pi \\ \arcsin\left(\frac{2}{2R}\right) + \arcsin\left(\frac{7}{2R}\right) + \arcsin\left(\frac{11}{2R}\right) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Posons f la fonction définie sur $[\frac{11}{2}, +\infty[$ par

$$f(R) = \arcsin\left(\frac{2}{2R}\right) + \arcsin\left(\frac{7}{2R}\right) + \arcsin\left(\frac{11}{2R}\right).$$

La fonction inverse $R \mapsto \frac{1}{R}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et la fonction arcsinus est strictement croissante sur $[0, 1]$ donc par composition f est strictement décroissante sur $[\frac{11}{2}, +\infty[$. La fonction f est continue et

$$\begin{aligned} f\left(\frac{11}{2}\right) &= \arcsin\left(\frac{2}{11}\right) + \arcsin\left(\frac{7}{11}\right) + \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2} \\ \lim_{R\to+\infty} f(R) &= 0 \end{aligned}$$

donc le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence et l'unicité d'un $R > \frac{11}{2}$ tel que

$$\arcsin\left(\frac{2}{2R}\right) + \arcsin\left(\frac{7}{2R}\right) + \arcsin\left(\frac{11}{2R}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Une construction des six points faites à l'aide de geogebra laisse penser que $R = 7$. Montrons effectivement que

$$\arcsin\left(\frac{2}{14}\right) + \arcsin\left(\frac{7}{14}\right) + \arcsin\left(\frac{11}{14}\right) = \frac{\pi}{2}$$

ou encore de manière équivalente

$$\arcsin\left(\frac{2}{14}\right) + \arcsin\left(\frac{11}{14}\right) = \frac{\pi}{3}. \qquad (**)$$

On a

$$0 \leqslant \arcsin\left(\frac{2}{14}\right) + \arcsin\left(\frac{11}{14}\right) \leqslant \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$0 \leqslant \arcsin\left(\frac{2}{14}\right) + \arcsin\left(\frac{11}{14}\right) \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

donc l'équation (**) équivaut à

$$\sin\left(\arcsin\left(\frac{2}{14}\right) + \arcsin\left(\frac{11}{14}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

On vérifie avec la formule d'addition suivante

$$\sin\left(\arcsin(a) + \sin(b)\right) = a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \quad \forall a, b \in [-1; 1]$$

que cette équation est bien vérifiée, ce qui achève la démonstration.