Mathématiques - brevet de technicien supérieur session 2007 - groupement A Éléments de correction

Exercice 1 - (12 points)

Partie A

1. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $h'(t) = 0$.
   D'où il vient immédiatement : $\frac{1}{2}y'(t) + y(t) = 10 - \beta$: h est une solution particulière de (E_1).
2. L'équation homogène associée à (E_1) est

$$\frac{1}{2}y'(t) + y(t) = 0 \quad (E_0).$$

   La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(t) = 2t$ est une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.
   On en déduit la solution générale de l'équation homogène

$$(E_0),\ y(t) = k\mathrm{e}^{-2t} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

   La solution générale de (E_1) s'obtient en ajoutant une solution particulière h à la solution générale de l'équation homogène (E_0).
   La solution générale de (E_1) peut s'écrire :

$$y(t) = k\mathrm{e}^{-2t} + 10 - \beta \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

3. La fonction f est solution de (E_1) alors $f(t) = k\mathrm{e}^{-2t} + 10 - \beta$.
   On veut de plus $f(0) = 10$ alors $k = \beta$, d'où :

$$f(t) = \beta\mathrm{e}^{-2t} + 10 - \beta$$

4. On a : $\lim\limits_{t\to+\infty}(-2t) = -\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} \mathrm{e}^u = 0$, alors, par composée, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-2t} = 0$.
   On obtient donc :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 10 - \beta = f_\infty$$

Partie B

1. La fonction i est causale et on a pour $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} i(t) &= 13\int_0^t [10U(u) - g(u)]\ \mathrm{d}u \\ &= 130\int_0^t U(u)\ \mathrm{d}u - 13\int_0^t g(u)\ \mathrm{d}u \\ &= 130 int_0^t 1\ \mathrm{d}u - 13\int_0^t g(u)\ \mathrm{d}u \\ &= 130t - 13\int_0^t g(u)\ \mathrm{d}u \\ &= 130tU(t) - 13\int_0^t g(u)\ \mathrm{d}u \end{aligned}$$

On a

$$\mathcal{L}\left[tU(t)\right] = \frac{1}{p^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}\left[\int_0^t g(u)\ \mathrm{d}u\right] = \frac{G(p)}{p}$$

D'où

$$I(p) = \frac{130}{p^2} - 13\frac{G(p)}{p}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g'(t)] &= pG(p) - g(0^+) \\ &= pG(p) - 10 \quad \text{car } g(0^+) = 10 \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{L}[U(t)] = \frac{1}{p}$$

d'où, en prenant la transformée de Laplace de l'équation (E_2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[pG(p) - 10] + G(p) &= \frac{130}{p^2} - 13\frac{G(p)}{p} + \frac{10-\beta}{p} \\ \left(\frac{1}{2}p + 1 + \frac{13}{p}\right)G(p) &= \frac{130}{p^2} + \frac{10-\beta}{p} + 5 \\ \frac{p^2+2p+26}{2p}G(p) &= \frac{5p^2 + (10-\beta)p + 130}{p^2} \\ \text{alors} \quad G(p) &= \frac{10p^2 + 2(10-\beta)p + 260}{p(p^2+2p+26)} \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned} \frac{10}{p} - \frac{2\beta}{(p+1)^2 + 5^2} &= \frac{10[(p+1)^2+5^2] - 2\beta p}{p(p^2+2p+26)} \\ &= \frac{10p^2 + 2(10-\beta)p + 260}{p(p^2+2p+26)} \\ &= G(p) \end{aligned}$$

4. On a alors

$$pG(p) = 10 - \frac{2\beta p}{(p+1)^2+5^2}$$

et

$$\lim_{p\to+0^+} \frac{2\beta p}{(p+1)^2+5^2} = 0$$

d'où

$$\lim_{p\to 0^+} pG(p) = 10 = g_\infty$$

5. (a) On a

$$\mathcal{L}[\sin(5t)U(t)] = \frac{5}{p^2+5^2}$$

et

$$\mathcal{L}[f(t)\mathrm{e}^{-t}U(t)] = F(p+1)$$

d'où

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-t}\sin(5t)U(t)] = \frac{5}{(p+1)^2+5^2}$$

(b) À l'aide de la question **3.**, on a

$$G(p) = \frac{10}{p} - \frac{2\beta}{5} \times \frac{5}{(p+1)^2+5^2}$$

et sachant que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = U(t)$$

alors

$$g(t) = 10U(t) - \frac{2\beta}{5}\mathrm{e}^{-t}\sin(5t)U(t)$$

Partie C

1. (a) On a

$$\begin{aligned} f(t) &= 5\mathrm{e}^{-2t} + 5 \\ f(t) &= f_\infty \mathrm{e}^{-2t} + f_\infty \\ \text{d'où } \frac{f(t)-f_\infty}{f_\infty} &= \mathrm{e}^{-2t} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-2t} &\leq 0,02 \\ \mathrm{e}^{-2t} &\leq \frac{1}{50} \\ -2t &\leq -\ln 50 \\ t &\geq \frac{1}{2}\ln 50 = t_1 \\ t_1 &\simeq 2,0 \end{aligned}$$

2. On veut
$$-0,02 \leq \frac{g(t)-10}{10} \leq 0,02 \quad \text{équivaut à} \quad 9,8 \leq g(t) \leq 10,2$$
Il faut alors tracer les deux droites d'équations respectives
$$y = 9,8$$
$$y = 10,2$$
Graphiquement, on obtient
$$t_2 \simeq 2,3$$

Exercice 2 - (8 points)

1. (a)

$$\begin{aligned}|T(\omega)| &= \left|\frac{-\mathrm{j}\omega\mathrm{k}}{1-\mathrm{j}\dfrac{\omega}{2}}\right| \\ &= \frac{|-\mathrm{j}\omega\mathrm{k}|}{\left|1-\mathrm{j}\dfrac{\omega}{2}\right|} \\ &= \frac{k\omega}{\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{4}}} \quad (k>0)\end{aligned}$$

   (b) On a

$$H(\omega) = (T(\omega))^3$$

   alors

$$\begin{aligned}r(\omega) &= |H(\omega)| \\ &= |T(\omega)|^3 \\ &= \left(\frac{k\omega}{\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{4}}}\right)^3\end{aligned}$$

2. (a) – $\arg\left((-\mathrm{j}\omega\mathrm{k})^3\right) = 3\arg(-\mathrm{j}\omega\mathrm{k})$ avec $k>0$ et $\omega>0$, alors

$$\arg(-\mathrm{j}\omega\mathrm{k}) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{à } 2\pi \text{ près}$$

   d'où

$$\begin{aligned}\arg\left((-\mathrm{j}\omega\mathrm{k})^3\right) &= -\frac{3\pi}{2} \quad \text{à } 2\pi \text{ près} \\ &= \frac{\pi}{2} \quad \text{à } 2\pi \text{ près}\end{aligned}$$

   – Soit $\theta = \arg\left(1-\mathrm{j}\dfrac{\omega}{2}\right)$ alors

$$\cos\theta > 0 \quad \text{et} \quad \sin\theta < 0 \quad \text{donc } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0\right[$$

   alors

$$\tan\theta = -\frac{\omega}{2}$$

   équivaut à

$$\theta = \arctan\left(-\frac{\omega}{2}\right)$$

   En utilisant l'imparité de la fonction arctangente,

$$\arg\left(1-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

– On a

$$H(\omega) = (T(\omega))^3$$

alors

$$\begin{aligned}
\arg H(\omega) &= \arg \frac{(-\mathrm{j}\omega\mathrm{k})^3}{\left(1-\mathrm{j}\dfrac{\omega}{2}\right)^3} \\
&= \arg\left(-\mathrm{j}\omega\mathrm{k}\right)^3 - 3\times\arg\left(1-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}\right) \\
\varphi(\omega) &= \frac{\pi}{2} + 3\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)
\end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
\varphi'(\omega) &= 3\times\frac{\dfrac{1}{2}}{1+\left(\dfrac{\omega}{2}\right)^2} \\
&= \frac{3}{2}\times\frac{1}{1+\dfrac{\omega^2}{4}}
\end{aligned}$$

Alors

$$\varphi'(\omega) > 0 \quad \text{sur }]0\ ;\ +\infty[$$

(c) – On a

$$\lim_{t\to 0}\arctan t = 0$$

alors

$$\lim_{\omega\to+\infty}\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

– On a

$$\lim_{t\to+\infty}\arctan t = \frac{\pi}{2}$$

alors

$$\lim_{\omega\to+\infty}\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} + 3\times\frac{\pi}{2} = 2\pi$$

3. Tableau des variations conjointes :

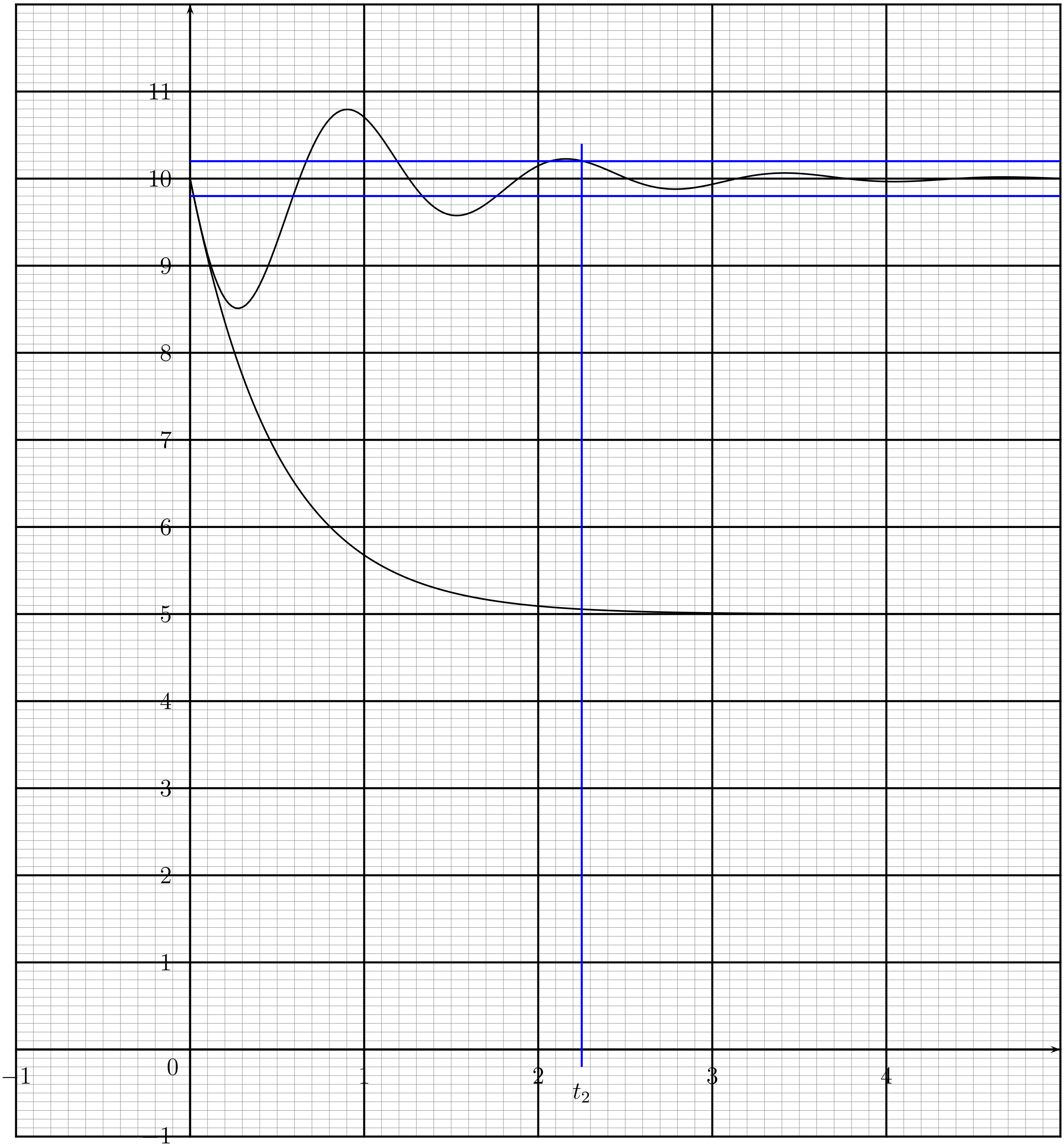
ω	0		$+\infty$
$r'(\omega)$	$\Vert$	$+$	
$r(\omega)$	$\Vert$ 0	$\nearrow$	$8k^3$
$\varphi(\omega)$	$\Vert$ $\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	2π
$\varphi'(\omega)$	$\Vert$	$+$	

4. (a) Il faut placer le point M_0, intersection du cercle de centre 0 et de rayon 1, avec la courbe $\mathcal{C}$.

   (b) On a $|H(\omega_0)| = 1$ équivaut à $|T(\omega_0)| = 1$ équivaut à $|T(\omega_0)|^2 = 1$, d'où

$$\begin{aligned}
\left(\frac{k\omega_0}{\sqrt{1+\frac{\omega_0^2}{4}}}\right)^2 &= 1 \\
k^2\omega^2 &= 1 + \frac{\omega_0^2}{4} \\
\left(k^2 - \frac{1}{4}\right)\omega_0 &= 1 \quad \text{avec } k = 0,9 \\
\omega_0 &= \frac{1}{0,56} \\
\omega &\simeq 1,34 \text{ rad.s}^{-1} \\
\text{alors} \quad \varphi(\omega_0) &= \frac{\pi}{2} + 3\arctan\left(\frac{\omega_0}{2}\right) \\
\varphi(\omega_0) &\simeq 3,34 \text{ rad}
\end{aligned}$$

Annexe 1
Document réponse à rendre avec la copie



Annexe 2
Document réponse à rendre avec la copie