Mathématiques - brevet de technicien supérieur session 2006 - groupement A Éléments de correction

Exercice 1 - Spécialités CIRA, IRIST, Systèmes électroniques (sur 11 points)

Partie I

1. À l'aide du formulaire, et en notant $w(n) = y(n-2)$, on a $(\mathcal{Z}w)(z) = z^{-2}(\mathcal{Z}y)(z)$.
   De même, en notant $v(n) = x(n-1)$, $(\mathcal{Z}v)(z) = z^{-1}(\mathcal{Z}x)(z)$.
   Par linéarité de la transformée en z dans l'équation récurrente, on obtient :
   $$\begin{aligned}(\mathcal{Z}y)(z) - z^{-2}(\mathcal{Z}y)(z) &= 0,04z^{-1}(\mathcal{Z}x)(z)\\ \Leftrightarrow z^{-2}(z^2-1)(\mathcal{Z}y)(z) &= 0,04z^{-1}(\mathcal{Z}x)(z)\\ \Leftrightarrow (z^2-1)(\mathcal{Z}y)(z) &= 0,04z(\mathcal{Z}x)(z)\end{aligned}$$
   Or $z^2-1 = (z-1)(z+1)$, par conséquent si z est différent de -1 et 1, on a :
   $$(\mathcal{Z}y)(z) = \frac{0,04z}{(z-1)(z+1)}(\mathcal{Z}x)(z).$$

2. (a) À l'aide de la table des transformées en $\mathcal{Z}$, $(\mathcal{Z}x)(z) = (\mathcal{Z}e)(z) = \dfrac{z}{z-1}$.
   En remplaçant dans l'expression du **1.**, on obtient :
   $$(\mathcal{Z}y)(z) = \frac{0,04z^2}{(z-1)^2(z+1)}.$$

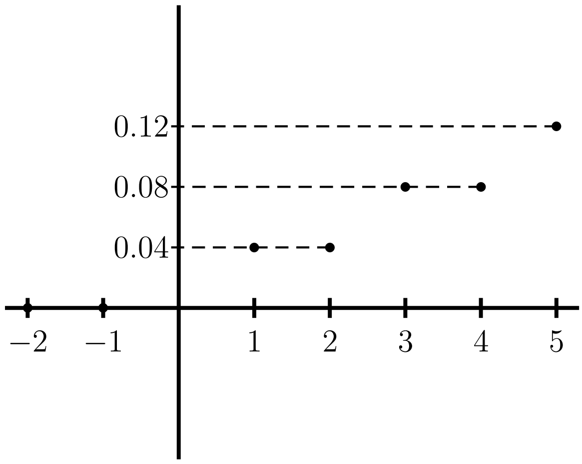
   (b) Par réduction au même dénominateur, on obtient :
   $$\begin{aligned}\frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+1} &= \frac{A(z+1) + B(z-1)(z+1) + C(z-1)^2}{(z-1)^2(z+1)}\\ &= \frac{(b+c)z^2 + (a-2c)z + a - b + c}{(z-1)^2(z+1)}\end{aligned}$$
   d'où le système suivant :
   $$\left\{\begin{array}{ll} b+c &= 0\\ a-2c &= 0,04\\ a-b+c &= 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0,02\\ b = 0,01\\ c = -0,01\end{array}\right. .$$
   Conclusion :
   $$\frac{0,04z}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{0,02}{(z-1)^2} + \frac{0,01}{z-1} - \frac{0,01}{z+1}.$$

   (c) À l'aide du **a.** et **b.**, on a :
   $$(\mathcal{Z}y)(z) = \frac{0,02z}{(z-1)^2} + \frac{0,01z}{z-1} - \frac{0,01z}{z+1}.$$
   L'original de $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ est $r(n) = n$ pour $n \geq 0$.
   L'original de $\dfrac{z}{z-1}$ est $e(n) = 1$ pour $n \geq 0$.
   L'original de $\dfrac{z}{z+1}$ est $(-1)^n$: lecture de la table avec $\dfrac{z}{z+1} = \dfrac{z}{z-(-1)}$ et $a = -1$.
   On obtient finalement, pour n entier positif ou nul :
   $$y(n) = 0,02n + 0,01 - 0,01(-1)^n.$$

(d) $(-1)^{2k} = 1$ d'où $y(2k) = 0,04k$.
$(-1)^{2k+1} = -1$ d'où $y(2k+1) = 0,02 \times (2k+1) - 0,01 \times 2 \Leftrightarrow y(2k+1) = 0,04k + 0,04$.

(e) On a donc, pour tout entier naturel k, $y(2k+2) = y(2(k+1)) = 0,04(k+1)$, et $y(2k+1) = 0,04(k+1)$ d'après **d.**.
Conclusion : Pour tout nombre entier naturel k, on a : $y(2k+1) = y(2k+2)$.

(f) $y(-2) = 0$
$y(-1) = 0$
$y(0) = 0$
$y(1) = y(2) = 0,04$
$y(3) = y(4) = 0,08$
$y(5) = 0,12$.
Représentation graphique du signal causal :



Partie II

1. L'original de $\dfrac{F(p)}{p}$ est $\displaystyle\int_0^t f(u)U(t)\mathrm{d}u$.

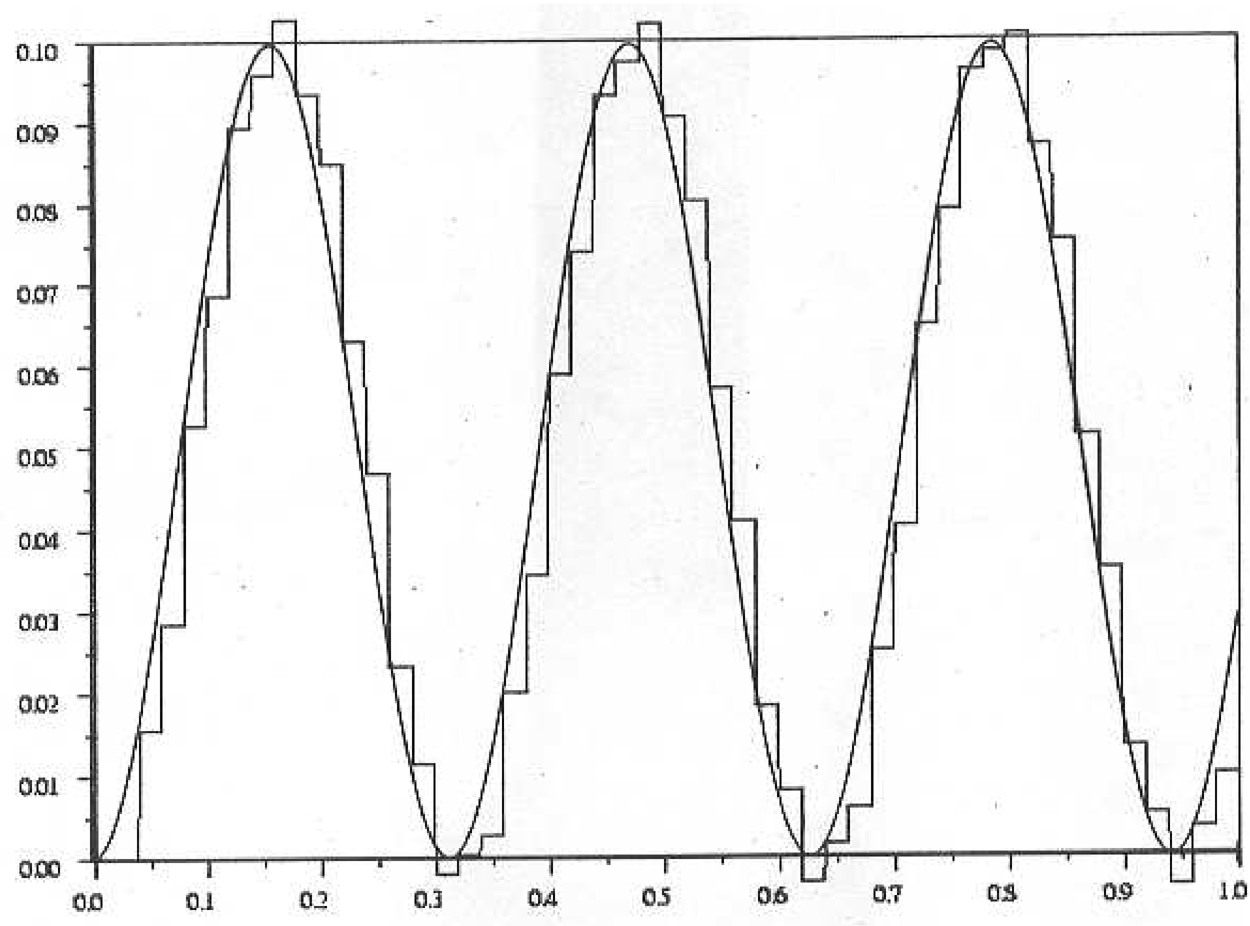
   Or f est causale alors $f(u)U(u) = f(u)$ pour t positif ou nul d'où : $s(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)\mathrm{d}u$.

2.
$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sin(20u)\mathrm{d}u \\ &= \left[-\frac{\cos(20u)}{20}\right]_0^t \\ &= \frac{1}{20}\left(1 - \cos(20t)\right). \end{aligned}$$

3. La valeur minimale de s est 0 pour $t = \dfrac{k\pi}{10}$ avec k entier naturel.

   La valeur maximale de s est $\dfrac{1}{10}$ pour $t = \dfrac{(2k+1)\pi}{20}$ avec k entier naturel.

Document réponse



Exercice 1 - Spécialités Électrotechnique, Génie optique, TPIL - (sur 11 points)

Partie A

1. L'événement E_1 se note $(A \cap B)$ alors :

$$\begin{aligned} p(E_1) &= p(A \cap B) \\ &= p(A) \times p(B) \quad \text{les événements } A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\ &= 0,03 \times 0,02 \\ &= 0,0006 \end{aligned}$$

2. L'événement E_2 se note $(A \cup B)$ alors :

$$\begin{aligned} p(E_2) &= p(A \cup B) \\ &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= 0,03 + 0,02 - 0,0006 \\ &= 0,0494. \end{aligned}$$

3. L'événement E_3 est l'événement contraire de E_2 alors :

$$\begin{aligned} p(E_3) &= p(\overline{E_2}) \\ &= 1 - p(E_2) \\ &= 1 - 0,0494 \\ &= 0,9506. \end{aligned}$$

4. On cherche à calculer $p(E_1/E_2)$ alors :

$$\begin{aligned} p(E_1/E_2) &= \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)} \\ &= \frac{p(E_1)}{p(E_2)} \\ &= \frac{0,0006}{0,0494} \\ &\approx 0,012. \end{aligned}$$

Partie B

1. (a) Extraire un lot de 100 appareils revient à répéter 100 fois le prélèvement d'un appareil. Cet appareil est défectueux avec une probabilité $p = 0,05$ ou non défectueux avec une probabilité $q = 1 - p = 0,95$.
   L'assimilation du tirage à un tirage avec remise assure l'indépendance de ces épreuves.
   En conclusion, la variable X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,05$.

   (b) L'espérance est $E(X_1) = np \Leftrightarrow E(X_1) = 100 \times 0,05 \Leftrightarrow E(X_1) = 5$.

2. On suppose que l'on peut approcher la loi de X_1 par une loi de Poisson de paramètre λ.

   (a) On conserve l'espérance mathématique. Par conséquent, le paramètre de la loi de Poisson est $\lambda = np = 5$.

   (b) On note X_p la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 appareils, associe le nombre d'appareils défectueux suivant la loi de Poisson de paramètre 5. On cherche alors $p(X_p \leq 2)$.

$$\begin{aligned} p(X_p \leq 2) &= p(X_p = 0) + p(X_p = 1) + p(X_p = 2) \\ &\approx 0,007 + 0,034 + 0,084 \\ &\approx 0,13. \end{aligned}$$

Partie C

1. On cherche la probabilité qu'il y ait au plus 50 appareils défectueux dans le lot, c'est-à-dire $p(X_2 \leq 50)$.
   X_2 suit la loi normale de moyenne 40 et d'écart-type $6,2$, alors la variable aléatoire $T = \dfrac{X_2 - 40}{6,2}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$\begin{aligned} p(X_2 \leq 50) &= p\left(T \leq \frac{50-40}{6.2}\right) \\ &= p(T \leq 1,61) \\ &= \Pi(1,61) \\ &\approx 0,95. \end{aligned}$$

2. On cherche le réel x tel que $P(X_2 > x) = 0,01$.
   $p(X_2 > x) = p\left(T > \dfrac{x-40}{6,2}\right)$ alors il faut résoudre $p\left(T > \dfrac{x-40}{6,2}\right) = 0,01$.
   Or $p\left(T > \dfrac{x-40}{6,2}\right) = 1 - p\left(T \leq \dfrac{x-40}{6,2}\right)$ d'où $p\left(T \leq \dfrac{x-40}{6,2}\right) = 0,99$.
   Or $\Pi(2,33) = 0,99 \Leftrightarrow \dfrac{x-40}{6,2} = 2,33 \Leftrightarrow x = 40 + 2,33 \times 6,2 \Leftrightarrow x = 54,45$.
   Le plus petit entier k tel que la probabilité que le lot comporte plus de k appareils défectueux soit inférieure à $0,01$ est $k = 55$.

Exercice 2 - Toutes spécialités (sur 9 points)

Partie A

1.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T (\alpha t+\beta)\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec } T=1\\
&= \left[\frac{\alpha t^2}{2}+\beta t\right]_0^1\\
&= \left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)-(0)\\
&= \frac{\alpha}{2}+\beta
\end{aligned}
$$

2. La pulsation est $\omega = 2\pi$.

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T (\alpha t+\beta)\sin(2\pi n t)\mathrm{d}t \qquad \text{avec } T=1\\
&= 2\int_0^1 (\alpha t+\beta)\sin(2\pi n t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

On intègre par parties en posant :

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \alpha t+\beta \qquad \text{alors} \qquad u'(t)=\alpha\\
v'(t) &= \sin(2\pi n t) \qquad \text{alors} \qquad v(t) = -\frac{\cos(2\pi n t)}{2\pi n}
\end{aligned}
$$

d'où :

$$
\begin{aligned}
b_n &= 2\left(-\left[\frac{(\alpha t+\beta)\cos(2\pi n t)}{2\pi n}\right]_0^1 - \frac{\alpha}{2\pi n}\int_0^1 (-\cos(2\pi n t))\,\mathrm{d}t\right)\\
&= 2\left(-\frac{1}{2\pi n}\left[(\alpha+\beta)-\beta\right]+\frac{\alpha}{2\pi n}\left[\frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n}\right]_0^1\right)\\
&= 2\left(-\frac{\alpha}{2\pi n}+0\right)\\
&= -\frac{\alpha}{n\pi}
\end{aligned}
$$

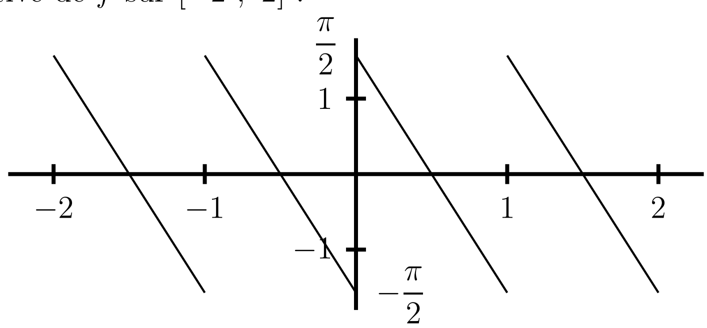
3. (a) On veut $a_0 = 0$ et $b_n = \dfrac{1}{n}$ et d'après **2.**, on obtient le système suivant :

$$
\left\{\begin{aligned} \frac{\alpha}{2}+\beta &= 0\\ -\frac{\alpha}{n\pi} &= \frac{1}{n}\end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \alpha &= -\pi\\ \beta &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}\right. .
$$

L'expression de f est alors :

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \pi t.$$

(b) Courbe représentative de f sur $[-2\ ;\ 2]$:



Partie B

1. On a :

$$s_1(t) = \frac{1}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t)$$

d'où

$$\begin{aligned} s_1'(t) &= \frac{2\pi}{1-4\pi^2}\cos(2\pi t) + \frac{4\pi}{2(1-16\pi^2)}\cos(4\pi t) \\ s_1"(t) &= -\frac{4\pi^2}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t) - \frac{16\pi^2}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_1"(t) + s(t) &= -\frac{4\pi^2}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t) - \frac{16\pi^2}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t) + \frac{1}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t) \\ &= \frac{1-4\pi^2}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t) + \frac{1-16\pi^2}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t) \\ &= \sin(2\pi t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi t). \end{aligned}$$

Conclusion : s_1 est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Il faut chercher la solution générale de l'équation différentielle homogène assocée à (E) :

$$s"(t) + s(t) = 0.$$

L'équation caractéristique associée est : $r^2 + 1 = 0$ dont le discriminant est égal à -1. Cette équation possède deux racines complexes conjuguées qui sont j et -j.
La solution générale de l'équation homogène est alors :

$$s_0(t) = \lambda \sin t + \mu \cos t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de (E) est donné par la somme entre une solution particulière de l'équation complète et la solution générale de l'équation homogène associée, d'où :

$$\begin{aligned} s(t) &= s_1(t) + s_0(t) \\ s(t) &= \frac{1}{1-4\pi^2}\sin(2\pi t) + \frac{1}{2(1-16\pi^2)}\sin(4\pi t) + \lambda \sin t + \mu \cos t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$