Mathématiques - brevet de technicien supérieur session 2005 - groupement A

Exercice 1 - Spécialités CIRA, Électronique, Électrotechnique, Génie optique et TPIL (sur 9 points)

1. Soit la fonction numérique g définie sur $[0;\pi]$ par $g(t) = (1+\cos^2 t)\sin^2 t$.
   (a) Montrer que $g\,'(t) = 4\sin t\cos^3 t$.
   (b) En déduire les variations de g sur $[0;\pi]$.
2. Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 1 telle que :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{2} - \tau & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ f(t) = -\tau & \text{si} \quad \tau \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{où } \tau \text{ est un nombre réel tel que } 0 < \tau < \frac{1}{2}$$

   (a) *Uniquement dans cette question*, on prendra $\tau = \dfrac{1}{6}$.
   Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-1;1]$ dans un repère orthonormal.
   (b) On admet que la fonction f satisfait aux conditions de Dirichlet.
   Soit S le développement en série de Fourier associé à la fonction f.
   Montrer que :

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi\tau)\cos(2n\pi t)$$

3. On décide de ne conserver que les harmoniques de rang inférieur ou égal à 2.
   Soit la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = \frac{1}{\pi}\sin(2\pi\tau)\cos(2\pi t) + \frac{1}{2\pi}\sin(4\pi\tau)\cos(4\pi t)$$

   On désigne par E_h^2 le carré de la valeur efficace de h sur une période.
   (a) À l'aide de la formule de Parseval, déterminer E_h^2.
   (b) Montrer que $E_h^2 = \dfrac{1}{2\pi^2}\, g(2\pi\tau)$.
4. Déterminer la valeur de τ rendant E_h^2 maximal.

Exercice 1 - Spécialité IRIST (sur 9 points)

Le but de cet exercice est d'étudier une approximation du cercle de centre 0 et de rayon 1 par une courbe B-spline uniforme de degré 2, notée Γ, dont les points de contrôle P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4 ont pour affixes respectives :

$$p_0 = \frac{16}{9}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \quad , \quad p_1 = \frac{16}{9} \quad , \quad p_2 = \frac{16}{9}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \quad , \quad p_3 = p_0 \quad \text{et} \quad p_4 = p_1$$

où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
Les polynômes de Riesenfeld R_k de degré 2, pour k prenant les valeurs 0, 1 ou 2, sont définis par :

$$R_k(t) = 3\sum_{j=0}^{2-k}(-1)^j\ \frac{(t+2-k-j)^2}{j!\ (3-j)!}$$

La courbe B-spline Γ est la réunion de trois arcs de courbe C_j, j prenant les valeurs 1, 2 ou 3. L'arc C_j est l'ensemble des points $M_j(t)$ définis, pour tout t dans l'intervalle $[0,1]$ par l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{OM_j(t)} = R_0(t)\overrightarrow{OP_{j-1}} + R_1(t)\overrightarrow{OP_j} + R_2(t)\overrightarrow{OP_{j+1}}$$

Les arcs C_2 et C_3 sont représentés sur la figure du document réponse.

1. **Questions préliminaires**
   (a) Vérifier que les coordonnées du point P_0 sont $\left(-\frac{8}{9}, -\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$.
   (b) Placer les points de contrôle P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4 sur la figure du document réponse.
   (c) Développer et simplifier l'expression du polynôme R_0.

   Dans toute la suite de cet exercice, on admettra que, pour tout t dans l'intervalle $[0,1]$:

$$R_1(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad R_2(t) = \frac{1}{2}t^2$$

2. **Étude de l'arc C_1**
   On admet que les coordonnées $(x_1(t), y_1(t))$ du point $M_1(t)$ de l'arc C_1 sont, pour tout t dans l'intervalle $[0,1]$:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{4}{9}(-6t^2 + 6t + 1) \\ y_1(t) = \frac{8\sqrt{3}}{9}\left(t - \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

   (a) Étudier les variations des fonctions x_1 et y_1 définies ci-dessus et dresser un tableau des variations conjointes de ces deux fonctions. On donnera les coordonnées exactes des points $M_1(0)$, $M_1\left(\frac{1}{2}\right)$ et $M_1(1)$ de l'arc C_1.
   (b) Déterminer des vecteurs directeurs des tangentes à l'arc C_1 aux points $M_1(0)$ et $M_1(1)$.
   (c) Vérifier que ces vecteurs sont orthogonaux respectivement aux vecteurs $\overrightarrow{OM_1(0)}$ et $\overrightarrow{OM_1(1)}$.
   (d) Porter sur la figure du document réponse les tangentes à l'arc C_1 aux points $M_1(0)$ et $M_1(1)$. Tracer l'arc C_1 et les cercles de centre O passant par les points $M_1(0)$ et $M_1\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. **Étude de l'arc C_2**
   (a) On note $(x_2(t), y_2(t))$ les coordonnées du point $M_2(t)$ de l'arc C_2.
   Vérifier que $x_2(t) = \frac{4}{3}t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{4}{9}$.
   On admettra dans toute la suite de l'exercice que :

$$y_2(t) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}t^2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}t + \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

   (b) On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
   Soit M un point quelconque du plan et M' son image par la rotation r.
   Exprimer l'affixe z' du point M' en fonction de l'affixe z du point M.
   (c) On note (x, y) les coordonnées du point M et (x', y') celles du point $M' = r(M)$.
   Vérifier que : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$

(d) En déduire que, pour tout t dans l'intervalle $[0, 1]$, l'image du point $M_1(t)$ de l'arc C_1 par la rotation r est le point $M_2(t)$ de l'arc C_2.

On admet que l'arc C_2 est l'image de l'arc C_1 par la rotation r et que l'arc C_3, est l'image de l'arc C_2 par la rotation r.

4. **Calcul de l'aire A de la surface intérieure à la courbe B-spline Γ**

(a) On admet que l'aire de la surface délimitée par l'arc C_1 et la droite d'équation $x = \dfrac{4}{9}$ est donnée par l'intégrale :

$$I = \int_0^1 -y_1(t)x_1'(t)\ \mathrm{d}t$$

Calculer l'intégrale I.

(b) En déduire la valeur arrondie, au centième, de l'aire de la surface intérieure à la courbe Γ.

(c) Comparer le résultat avec l'aire d'un disque de rayon 1.

Exercice 2 - Toutes spécialités (sur 11 points)

L'exercice est composé de deux parties qui peuvent se traiter de façon indépendante.

Partie A

Un embrayage vient appliquer, à l'instant $t = 0$, un couple résistant constant sur un moteur dont la vitesse à vide est de 150 rad/s.
On note $\omega(t)$, la vitesse de rotation du moteur à l'instant t.
La fonction ω est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{200}y'(t) + y(t) = 146 \qquad (1)$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle positive t.

1. (a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (1).
On cherchera une solution particulière constante.

   (b) Sachant que $\omega(0) = 150$, montrer que $\omega(t) = 146 + 4\mathrm{e}^{-200t}$ pour tout $t \in [0, +\infty[$.

2. (a) On note $\omega_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} \omega(t)$. Déterminer la perte de vitesse $\omega(0) - \omega_\infty$. due au couple résistant.

   (b) On considère que la vitesse du moteur est stabilisée lorsque l'écart relatif $\left|\dfrac{\omega(t) - \omega_\infty}{\omega_\infty}\right|$ est inférieur à 1 %.
Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse.
On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au millième.

Partie B

La vitesse du moteur étant stabilisée, on s'intéresse dans cette deuxième partie à l'effet d'une perturbation γ du couple résistant sur la vitesse de rotation du moteur.
On note $f(t)$ la différence, à l'instant t, entre la vitesse perturbée du moteur et sa vitesse stabilisée.
La fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{200}f'(t) + f(t) = \gamma(t) \quad \text{avec} \quad f(0^+) = 0 \qquad (2)$$

On admet que la fonction f possède une transformée de Laplace notée F.
La fonction γ est définie par :

$$\gamma(t) = K[U(t) - U(t-\tau)]$$

où τ et K sont des réels strictement positifs caractérisant la perturbation et U est la fonction échelon unité ($U(t) = 0$ si $t < 0$ et $U(t) = 1$ si $t \geqslant 0$).

1. (a) Représenter la fonction γ pour $\tau = 0,005$ et $K = 0,2$.

   (b) Déterminer, en fonction de τ et K, la transformée de Laplace Γ de la fonction γ.

2. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (2), déterminer $F(p)$.

3. (a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\frac{200}{p(p+200)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+200}$$

   pour tout réel p strictement positif.

   (b) En déduire l'original f de la fonction F. On vérifiera notamment que :

$$\left\{\begin{array}{lll} f(t) = K(1 - \mathrm{e}^{-200t}) & \text{si} & t \in [0, \tau[\\ f(t) = K(\mathrm{e}^{200\tau} - 1)\mathrm{e}^{-200t} & \text{si} & t \in [\tau, +\infty[\end{array}\right.$$

   (c) Donner le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles $[0, \tau[$ et $[\tau, +\infty[$. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de ces deux intervalles.

   (d) Représenter la fonction f pour $\tau = 0,005$ et $K = 0,2$.
   On pourra tracer les courbes représentatives des fonctions γ et f dans le même repère.

Document réponse à rendre avec la copie