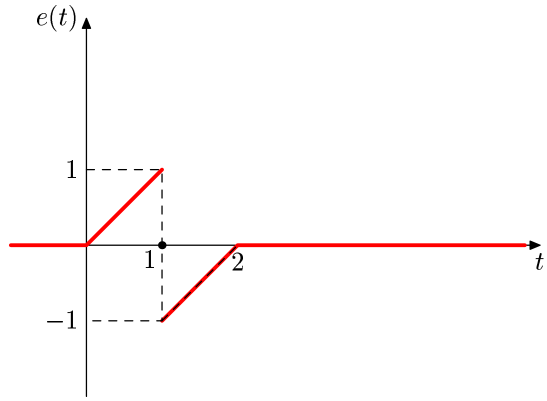
# Groupement A - session 2002

# Solutions proposées

## Exercice 1

1.

| $t$ | | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $tU(t)$ | 0 | $t$ | $t$ | $t$ |
| $-2U(t-1)$ | 0 | 0 | $-2$ | $-2$ |
| $-(t-2)U(t-2)$ | 0 | 0 | 0 | $-t+2$ |
| $e(t)$ | 0 | $t$ | $t-2$ | 0 |




2. Si $p>0$ :

$$E(p)=\frac{1}{p^2}-2\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-p}-\frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-2p}$$

3. On réduit au même dénominateur ; il vient :

$$\frac{1}{p^2(p+1)}=\frac{A(p+1)+Bp(p+1)+Cp^2}{p^2(p+1)}=\frac{(C+B)p^2+(A+B)p+A}{p^2(p+1)}$$

Donc :

$$\begin{cases} C+B=0 \\ A+B=0 \\ A=1 \end{cases}$$

Donc $B=-1$ et $C=1$ ; finalement :

$$\frac{1}{p^2(p+1)}=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}$$

4. Donc :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{2}{p}\mathrm{e}^{-p}-\frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-2p}\right) \\ &= \frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}-\left(\frac{2}{p}-\frac{2}{p+1}\right)\mathrm{e}^{-p}-\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}\right)\mathrm{e}^{-2p} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} s(t) &= \left(t-1+\mathrm{e}^{-t}\right)U(t)-\left(2-2\mathrm{e}^{-(t-1)}\right)U(t-1)-\left(t-2-1+\mathrm{e}^{-(t-2)}\right)U(t-2) \\ &= \left(t-1+\mathrm{e}^{-t}\right)U(t)-\left(2-2\mathrm{e}^{-t+1}\right)U(t-1)-\left(t-3+\mathrm{e}^{-t+2}\right)U(t-2) \end{aligned}$$

Donc :

$$s(t) = \begin{cases} 0+0+0=0 & \text{si} \quad t<0 \\ t-1+\mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ t-1+\mathrm{e}^{-t}-2+2\mathrm{e}^{-t+1}+0 = t-3+\mathrm{e}^{-t}(1+2\mathrm{e}) & \text{si} \quad 1 \leqslant t < 2 \\ t-3+\mathrm{e}^{-t}(1+2\mathrm{e})-t+3-\mathrm{e}^{-t+2} = \mathrm{e}^{-t}\left(1+2\mathrm{e}-\mathrm{e}^2\right) & \text{si} \quad t \geqslant 2 \end{cases}$$

5. 5.1 On a :

$$\begin{cases} s(1^+) = -2+\mathrm{e}^{-1}(1+2\mathrm{e}) = -2+\mathrm{e}^{-1}+2 = \mathrm{e}^{-1} \\ s(1^-) = 1-1+\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1} \end{cases}$$

donc $s(1^+) = s(1^-)$ ; on en déduit que $s$ est continue en $t=1$. De la même façon :

$$\begin{cases} s(2^+) = \mathrm{e}^{-2}\left(1+2\mathrm{e}-\mathrm{e}^2\right) = \mathrm{e}^{-2}+2\mathrm{e}^{-1}-1 \\ s(2^-) = -1+\mathrm{e}^{-2}(1+2\mathrm{e}) = -1+\mathrm{e}^{-2}+2\mathrm{e}^{-1} \end{cases}$$

donc $s(2^+) = s(2^-)$ ; on en déduit que $s$ est continue en $t=2$.

5.2 Dérivons :

$$s'(t) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad 0<t<1 \\ 1-\mathrm{e}^{-t}(1+2\mathrm{e}) & \text{si} \quad 1<t<2 \\ -\mathrm{e}^{-t}\left(1+2\mathrm{e}-\mathrm{e}^2\right) & \text{si} \quad t>2 \end{cases}$$

Étudions le signe de $s'(t)$ si $1<t<2$. Supposons que $s'(t) \geqslant 0$ ; on a alors :

$$\begin{aligned} 1-\mathrm{e}^{-t}(1+2\mathrm{e}) &\geqslant 0 \\ 1 &\geqslant \mathrm{e}^{-t}(1+2\mathrm{e}) \\ \frac{1}{1+2\mathrm{e}} &\geqslant \mathrm{e}^{-t} \\ -\ln(1+2\mathrm{e}) &\geqslant -t \\ t &\geqslant \ln(1+2\mathrm{e}) \end{aligned}$$

On obtient d'une manière analogue que :

$$s'(t) \leqslant 0 \quad \text{si} \quad t \leqslant \ln(1+2\mathrm{e})$$

En résumé :

| $t$ | $1$ | | $\ln(1+2\mathrm{e})$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $s'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

5.3 Calculons $s(\ln(1+2\mathrm{e}))$ :

$$\begin{aligned} s(\ln(1+2\mathrm{e}) &= \ln(1+2\mathrm{e})-3+\mathrm{e}^{-\ln(1+2\mathrm{e})}(1+2\mathrm{e}) \\ &= \ln(1+2\mathrm{e})-3+\frac{1}{1+2\mathrm{e}}(1+2\mathrm{e}) = \ln(1+2\mathrm{e})-2 \end{aligned}$$

Calcul de la limite :

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t}(1+2\mathrm{e}-\mathrm{e}^2) = 0$$

Variations de $s$ :

| $t$ | $0$ | | $1$ | | $\ln(1+2\mathrm{e})$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s'(t)$ | | $+$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $s(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\mathrm{e}^{-1}$ | $\searrow$ | $\ln(1+2\mathrm{e})-2$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | $0$ |

5.4 On a :

$$\begin{cases} s'(1^+) = 1-\mathrm{e}^{-1}(1+2\mathrm{e}) = 1-\mathrm{e}^{-1}-2 = -1-\mathrm{e}^{-1} \\ s'(1^-) = 1-\mathrm{e}^{-1} \end{cases}$$

donc $s'(1^+) \neq s'(1^-)$ par conséquent les deux demi-tangentes à droite et à gauche en $t = 1$ ne sont pas alignées : la courbe admet un point anguleux ; la fonction $s$ n'est pas dérivable en $t = 1$. En revanche :

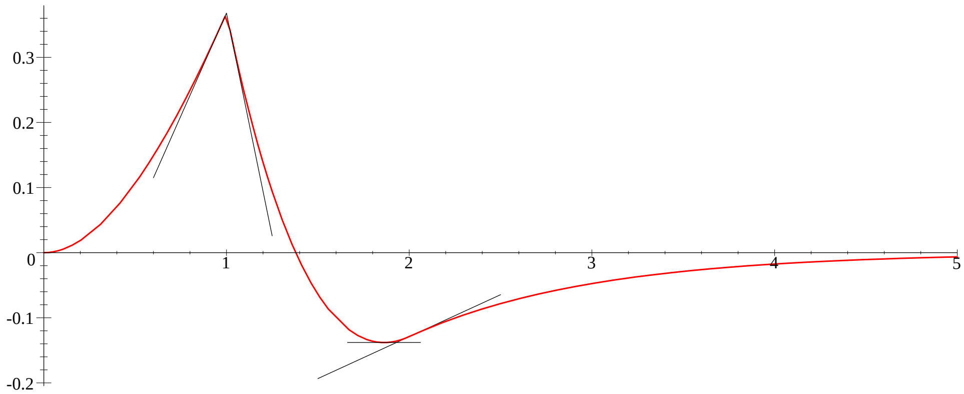
$$\begin{cases} s'(2^+) = -\mathrm{e}^{-2}\left(1 + 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^2\right) = -\mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-1} + 1 \\ s'(2^-) = 1 - \mathrm{e}^{-2}(1 + 2\mathrm{e}) = 1 - \mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e}^{-1} \end{cases}$$

donc $s'(2^+) = s'(2^-)$ : les deux demi-tangentes en $t = 2$ sont alignées ; la fonction $s$ est dérivable en $t = 2$.

5.5 Tableau de valeurs :

| $t$ | 1 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s(t)$ | 0,37 | 0,14 | −0,01 | −0,10 | −0,13 | −0,08 | −0,05 | −0,03 |

6.




# Exercice 2

## Partie A

1. Dérivons l'équation $(E_1)$ :

$$x'' + 2y' = -2\cos t \qquad (1)$$

De l'équation $(E_2)$, on tire :

$$y' = 2x + 2\cos t$$

En remplaçant $y'$ dans l'équation (1), il vient :

$$x'' + 2(2x + 2\cos t) = -2\cos t$$

$$x'' + 4x + 4\cos t = -2\cos t$$

$$x'' + 4x = -6\cos t$$

qui est l'équation différentielle $(E)$.

2. L'équation sans second membre a pour équation caractéristique :

$$r^2 + 4 = 0$$

dont les solutions sont :

$$r_1 = 2i \quad \text{et} \quad r_2 = -2i \quad \text{donc} \quad \alpha = \Re(r_1) = 0 \quad \text{et} \quad \beta = \Im(r_1) = 2$$

Donc la solution générale de l'équation sans second membre est :

$$x = (\lambda\cos\beta t + \mu\sin\beta t)\mathrm{e}^{\alpha t} = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)$$

Recherchons maintenant une solution particulière $x$ de l'équation complète $(E)$ sous la forme :

$$x = a\cos t + b\sin t$$

donc $x' = -a\sin t + b\cos t$ et $x'' = -a\cos t - b\sin t$ ; en remplaçant dans $(E)$, il vient donc :

$$x'' + 4x = -a\cos t - b\sin t + 4a\cos t + 4b\sin t = 3a\cos t + 3b\sin t$$

Il faut donc que :

$$3a\cos t + 3b\sin t = -6\cos t$$

Donc $b = 0$ et $a = -2$ conviennent ; par conséquent $x = -2\cos t$ est une solution particulière de l'équation complète $(E)$.
En conclusion, la solution générale de l'équation $(E)$ est :

$$x = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t) - 2\cos t \qquad (2)$$

Pour déterminer les solutions du système $(S)$, il reste à calculer $y$ ; on sait que, d'après $(E_1)$ :

$$y = \frac{1}{2}(-x' - 2\sin t)$$

On obtient donc, en remplaçant, à l'aide de l'équation (2) :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(-(-2\lambda\sin(2t) + 2\mu\cos(2t) + 2\sin t) - 2\sin t) \\ y &= \frac{1}{2}(2\lambda\sin(2t) - 2\mu\cos(2t) - 4\sin t) \\ y &= -\mu\cos(2t) + \lambda\sin(2t) - 2\sin t \end{aligned}$$

On vérifie, sans difficulté, en remplaçant dans le système $(S)$, que ces solutions conviennent.
En conclusion, la solution de $(S)$ est :

$$\begin{cases} x = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t) - 2\cos t \\ y = -\mu\cos(2t) + \lambda\sin(2t) - 2\sin t \end{cases}$$

3. Déterminons la solution particulière qui satisfait $x(0) = -1$ et $y(0) = 0$. Il vient donc :

$$x(0) = \lambda - 2 = -1 \quad \text{donc} \quad \lambda = 1$$

et

$$y(0) = -\mu = 0 \quad \text{donc} \quad \mu = 0$$

Donc la solution particulière de $(E)$ demandée est :

$$\begin{cases} x = \cos(2t) - 2\cos t \\ y = \sin(2t) - 2\sin t \end{cases}$$

## Partie B

1. $f(-t) = f(t)$ car $\cos$ est pair ; $g(-t) = -g(t)$ car $\sin$ est impair ; donc la courbe $(\Gamma)$ admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.
   En effet : si le point $M\,(f(t)\,,\,g(t)) \in (\Gamma)$ alors son symétrique par rapport à l'axe des abscisses $N\,(f(-t)\,,\,g(-t)) \in (\Gamma)$.

2. 2.1 Calculons $f'(t)$ :

$$\begin{aligned} f'(t) &= -2\sin(2t) + 2\sin t = -2(\sin(2t) - \sin t) \\ &= -2\times 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right) = -4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right) \end{aligned}$$

   2.2 Si $0 \leqslant t \leqslant \pi$, on a :

   – d'une part $0 \leqslant \dfrac{t}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ donc $\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \geqslant 0$

– d'autre part $0 \leqslant \dfrac{3t}{2} \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$ donc il y a deux cas :

$$\begin{cases} \text{si } \ 0 \leqslant \dfrac{3t}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{2} \quad \text{alors} \quad \cos\left(\dfrac{3t}{2}\right) \geqslant 0 \\ \text{si } \ \dfrac{\pi}{2} \leqslant \dfrac{3t}{2} \leqslant \dfrac{3\pi}{2} \quad \text{alors} \quad \cos\left(\dfrac{3t}{2}\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

En résumé :

| $t$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $f'(t)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |

3. On admet que :

$$g'(t) = -4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{3t}{2}\right)$$

ainsi que :

| $t$ | $0$ | | $\frac{2\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $g'(t)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

donc le tableau conjoint sur $[0\ ,\ \pi]$ est :

| $t$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\frac{2\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $0$ | $-$ | $0$ | | $+$ | | $0$ |
| $f(t)$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\frac{3}{2}$ | | $\nearrow$ | | $3$ |
| $g'(t)$ | $0$ | | $-$ | | $0$ | $+$ | |
| $g(t)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\searrow$ | $-3\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\nearrow$ | $0$ |

4. Calculons le vecteur tangent $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}$ dans les trois cas ci-dessous :

– si $t = \dfrac{\pi}{3}$ alors $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$ et $g'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \neq 0$ donc $\overrightarrow{V_B}$ est colinéaire à $\overrightarrow{j}$ ;

– si $t = \dfrac{2\pi}{3}$ alors $g'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 0$ et $f'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\pi \neq 0$ donc $\overrightarrow{V_C}$ est colinéaire à $\overrightarrow{i}$ ;

– si $t = \pi$ alors $f'(\pi) = 0$ et $g'(\pi) = -4\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) \neq 0$ donc $\overrightarrow{V_D}$ est colinéaire à $\overrightarrow{j}$.

5.