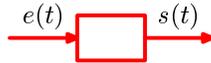


Groupement A - session 2002

Exercice 1 (12 points)

La fonction échelon unité U est définie par $U(t) = 0$ si $t < 0$ et $U(t) = 1$ si $t \geq 0$.

On considère le système «entrée-sortie» représenté ci-dessous :



On note s le signal de sortie associé au signal d'entrée e . Les fonctions s et e sont des fonctions causales, c'est à dire qu'elles sont nulles pour $t < 0$. On admet que les fonctions s et e admettent des transformées de Laplace, notées respectivement S et E .

La fonction de transfert H du système est définie par : $S(p) = H(p) \times E(p)$.

On considère le signal d'entrée e défini par :

$$e(t) = tU(t) - 2U(t-1) - (t-2)U(t-2)$$

et la fonction de transfert H définie sur $]0, +\infty[$ par $H(p) = \frac{1}{p+1}$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction e dans un repère orthonormal.
2. Pour $p > 0$, déterminer $E(p)$.
3. Déterminer les nombres réels A , B et C tels que, pour tout $p > 0$, on ait :

$$\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+1}$$

On admet que

$$\frac{2}{p(p+1)} = \frac{2}{p} - \frac{2}{p+1}$$

4. 4.1 Déterminer $S(p)$ puis $s(t)$.
- 4.2 En déduire que la fonction s est définie par :

$$\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) = t - 1 + e^{-t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ s(t) = t - 3 + e^{-t}(1 + 2e) & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ s(t) = e^{-t}(1 + 2e - e^2) & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

5. On rappelle que la notation $f(a^+)$ représente la limite de la fonction f lorsque la variable t tend vers a par valeurs supérieures : $f(a^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} f(t)$. De même, $f(a^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t < a}} f(t)$.

- 5.1 Calculer $s(1^+)$, $s(1^-)$, $s(2^+)$, $s(2^-)$. Que peut-on en conclure pour la fonction s lorsque $t = 1$ et $t = 2$?
- 5.2 Calculer $s'(t)$ sur chacun des intervalles $]0, 1[$, $]1, 2[$ et $]2, +\infty[$.
On admet que s' est strictement positive sur $]0, 1[\cup]2, +\infty[$.
Déterminer le signe de $s'(t)$ sur l'intervalle $]1, 2[$.
- 5.3 Calculer la valeur exacte de $s(\ln(1 + 2e))$. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$ et dresser le tableau de variation de la fonction s sur $]0, +\infty[$.
- 5.4 Calculer $s'(1^+)$, $s'(1^-)$, $s'(2^+)$, $s'(2^-)$. On admet que ces nombres sont respectivement les coefficients directeurs des demi-tangentes à droite et à gauche aux points d'abscisse 1 et d'abscisse 2 de la courbe Γ représentative de la fonction s .

6. On se place dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unités graphiques 5 cm sur l'axe des abscisses et 50 cm sur l'axe des ordonnées.

- 6.1 Recopier et compléter le tableau suivant dans lequel les valeurs numériques seront données à 10^{-2} près.

t	1	1,2	1,4	1,6	2	2,5	3	3,5
$s(t)$								

6.2 Tracer alors les tangentes ou demi-tangentes à la courbe Γ représentative de la fonction s aux points d'abscisses 0, 1 et 2. Tracer alors la courbe Γ .

Exercice 2 (8 points)

On se propose de résoudre le système différentiel (S) suivant, puis d'en déterminer une solution particulière.

$$(S) \begin{cases} x'(t) + 2y(t) = -2 \sin t & (E_1) \\ 2x(t) - y'(t) = -2 \cos t & (E_2) \end{cases}$$

Les fonctions x et y sont des fonctions de la variable réelle t , deux fois dérivables sur \mathbb{R} .

Partie A

1. Montrer en utilisant les équations (E_1) et (E_2) que la fonction x vérifie, pour tout t dans \mathbb{R} , l'équation différentielle :

$$x''(t) + 4x(t) = -6 \cos t \quad (E)$$

2. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle (E) . En déduire les solutions du système (S) .
3. Déterminer la solution particulière du système (S) vérifiant les conditions initiales $x(0) = -1$ et $y(0) = 0$.

Partie B

On considère la courbe (Γ) définie par la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = f(t) = \cos(2t) - 2 \cos t \\ y = g(t) = \sin(2t) - 2 \sin t \end{cases}$$

où t est un réel appartenant à l'intervalle $[-\pi, +\pi]$.

1. Montrer que la courbe (Γ) admet un axe de symétrie en calculant $f(-t)$ et $g(-t)$.
2. 2.1 Calculer $f'(t)$.

Montrer que : $f'(t) = -4 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{3t}{2}\right)$.

- 2.2 Établir le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

3. On admet que $g'(t) = -4 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{3t}{2}\right)$ et que le signe de g' est donné par le tableau suivant :

t	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	
Signe de $g'(t)$	0	-	0	+

Dresser sur l'intervalle $[0, \pi]$ le tableau des variations conjointes des fonctions f et g .

4. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe (Γ) aux points B, C et D de paramètre respectifs $t_B = \frac{\pi}{3}$, $t_C = \frac{2\pi}{3}$ et $t_D = \pi$.
5. Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. On admet que la tangente à la courbe (Γ) au point A de paramètre $t_A = 0$ a pour vecteur directeur \vec{i} . Tracer les tangentes aux points A, B, C et D puis la courbe (Γ) .