BTS groupe A session 2001

Exercice 1

Partie A

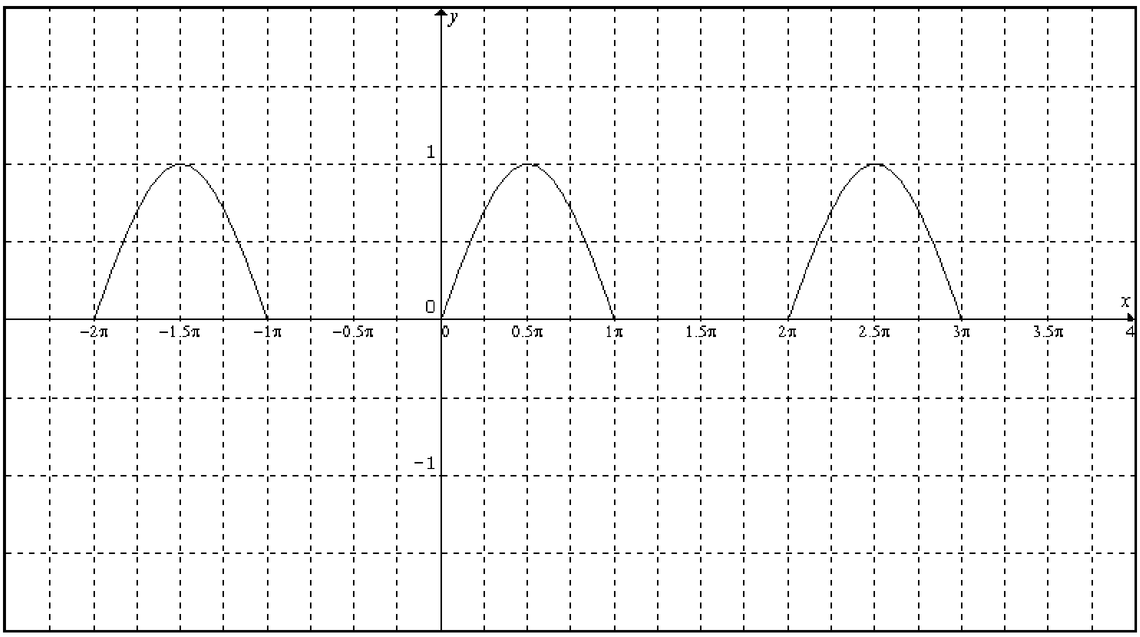
1. Calculons la première intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos t \,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin 2t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{4}\left[\cos 2\pi - \cos 0\right] = 0\end{aligned}$$

   et la seconde intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos 2t \,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(\sin 3t + \sin -t\right)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(\sin 3t - \sin t\right)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos 3t + \cos t\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{3}\cos 3\pi + \cos \pi\right) - \left(-\frac{1}{3}\cos 0 + \cos 0\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3} - 1\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - 2\right) = -\frac{1}{2}\frac{4}{3} = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

2. (a) La représentation graphique à l'allure suivante :



De plus $T = 2\pi$ donc $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1$.

(b) Calculons a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} e(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin t\ \mathrm{d}t \quad \text{puisque} \quad e(t)=0 \quad \text{si} \quad t\in[\pi\ ,\ 2\pi] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\cos t\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2\pi}\left(\cos\pi - \cos 0\right) = -\frac{1}{2\pi}\left(-1-1\right) = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

Calculons a_1 :

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} e(t)\cos\omega t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cos t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}(0) = 0$$

Calculons a_2 :

$$a_2 = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} e(t)\cos 2\omega t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\cos 2t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3\pi}$$

On admet que $b_1 = \dfrac{1}{2}$ et $b_2 = 0$.

3. (a) Calculons E^2 si E est la valeur efficace de e :

$$\begin{aligned} E^2 &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T}\left[e(t)\right]^2\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\ \mathrm{d}t \quad \text{car} \quad e(t)=0 \quad \text{si} \quad t\in[\pi\ ,\ 2\pi] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(1-\cos 2t\right)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi\right) - 0\right] = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(b) D'après la formule de Bessel-Parseval on a :

$$E^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$$

Calculons P :

$$\begin{aligned} P &= a_0^2 + \frac{1}{2}\left(a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3\pi}\right)^2 + 0^2\right] \\ &= \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{4}{9\pi^2}\right) = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{8} + \frac{2}{9\pi^2} = \frac{11}{9\pi^2} + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

donc $\dfrac{P}{E^2} = \dfrac{\frac{11}{9\pi^2}+\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{44}{9\pi^2} + \dfrac{1}{2} \approx 0.9953$ donc la valeur approchée cherchée est 0.995.

Partie B

On a l'équation (2) :

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin t-\frac{2}{3\pi}\cos 2t \qquad (2)$$

avec $R=5000\ \Omega$ et $C=10^{-4}$ F.

1. Dérivons les deux membres de l'équation (2) :

$$Ri'(t)+\frac{1}{C}\,i(t)=\frac{1}{2}\cos t+\frac{4}{3\pi}\sin 2t \qquad (3)$$

En effet $\displaystyle\int_0^t i(u)\mathrm{d}u=[I(u)]_{u=0}^{u=t}=I(t)-I(0)$ où I est une primitive de i sur $[0\ ,\ +\infty[$; donc la dérivée de cette expression est $[I(t)-I(0)]'=I'(t)-0$ car $I(0)$ est une constante. Remplaçons dans (3) :

$$5000\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)+10^4\ i(t)=\frac{1}{2}\cos t+\frac{4}{3\pi}\sin 2t$$

Multiplions les deux membres par $\dfrac{1}{5000}=2\cdot 10^{-4}$; on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)+2i(t) &= 10^{-4}\cos t+\frac{8}{3\pi}\cdot 10^{-4}\sin 2t\\ &= 10^{-4}\cos t+\frac{8}{30\pi}\cdot 10^{-3}\sin 2t\\ &= 10^{-4}\cos t+\frac{4}{15\pi}\cdot 10^{-3}\sin 2t\end{aligned}$$

2. On pose $i_1(t)=4\cdot 10^{-5}\cos t+2\cdot 10^{-5}\sin t$ donc $i_1'(t)=-4\cdot 10^{-5}\sin t+2\cdot 10^{-5}\cos t$
Donc : $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)+2i(t)=-4\cdot 10^{-5}\sin t+2\cdot 10^{-5}\cos t+8\cdot 10^{-5}\cos t+4\cdot 10^{-5}\sin t=10^{-4}\cos t$ donc i_1 est bien une solution particulière de l'équation différentielle donnée.

3. Je cherche une solution particulière i_2, définie sur $[0\ ,\ +\infty[$, de la forme : $i_2(t)=a\cos 2t+b\sin 2t$ où a et b sont deux réels à déterminer. Calculons $i_2'(t)$:

$$i_2'(t)=-2a\sin 2t+2b\cos 2t$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)+2i(t) &= -2a\sin 2t+2b\cos 2t+2a\cos 2t+2b\sin 2t\\ &= (2a+2b)\cos 2t+(-2a+2b)\sin 2t\end{aligned}$$

qui doit être égal à $\dfrac{4}{15\pi}\cdot 10^{-3}\sin 2t$ pour tout $t\in[0\ ,\ +\infty[$; donc je résous le système :

$$\begin{cases}2a+2b=0\\ -2a+2b=\dfrac{4}{15\pi}\cdot 10^{-3}\end{cases}$$

de la première équation je tire $b=-a$ que je porte dans la deuxième ; donc :

$$-4a=\frac{4}{15\pi}\cdot 10^{-3}$$

d'où $a=-\dfrac{1}{15\pi}\cdot 10^{-3}$ et $b=+\dfrac{1}{15\pi}\cdot 10^{-3}$
donc $i_2(t)=+\dfrac{1}{15\pi}\cdot 10^{-3}\,[-\cos 2t+\sin 2t]$ est une solution particulière de l'équation différentielle donnée.

4. Résolvons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + 2i(t) = 10^{-4}\ \cos t + \frac{4}{15\pi} \cdot 10^{-3}\ \sin 2t$$

   (a) Résolution de l'équation sans second membre :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + 2i(t) = 0$$

   Cette équation est de la forme $a(t)\ i' + b(t)\ i = 0$ avec $a(t) = 1$ et $b(t) = 2$ donc $\dfrac{b(t)}{a(t)} = 2$ et $G(t) = 2t$ donc la solution générale est de la forme :

$$i(t) = k\mathrm{e}^{-G(t)} = k\mathrm{e}^{-2t}$$

   (b) Des questions précédentes, il vient une solution particulière de l'équation complète :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

   et donc la solution générale de l'équation différentielle donnée est :

$$i(t) = k\mathrm{e}^{-2t} + i_1(t) + i_2(t)$$

   (c) Calcul de k, sachant que $i(0) = 0$:

$$\begin{aligned} i(0) &= k\mathrm{e}^{0} + i_1(0) + i_2(0) \\ &= k + 4 \cdot 10^{-5} + \frac{1}{15\pi} \cdot 10^{-3}(-1) = k + 4 \cdot 10^{-5} - \frac{10^{-3}}{15\pi} = 0 \end{aligned}$$

   donc $k = \dfrac{10^{-3}}{15\pi} - 4 \cdot 10^{-5}$
   Et la solution générale est :

$$i(t) = \left(\frac{10^{-3}}{15\pi} - 4 \cdot 10^{-5}\right)\mathrm{e}^{-2t} + 4 \cdot 10^{-5}\ \cos t + 2 \cdot 10^{-5}\ \sin t + \frac{1}{15\pi} \cdot 10^{-3}\ [-\cos 2t + \sin 2t]$$

   donc :

$$i(t) = 2 \cdot 10^{-5}\ \left[2\cos t + \sin t - 2\mathrm{e}^{-2t}\right] + \frac{10^{-3}}{15\pi}\ \left[-\cos 2t + \sin 2t + \mathrm{e}^{-2t}\right]$$

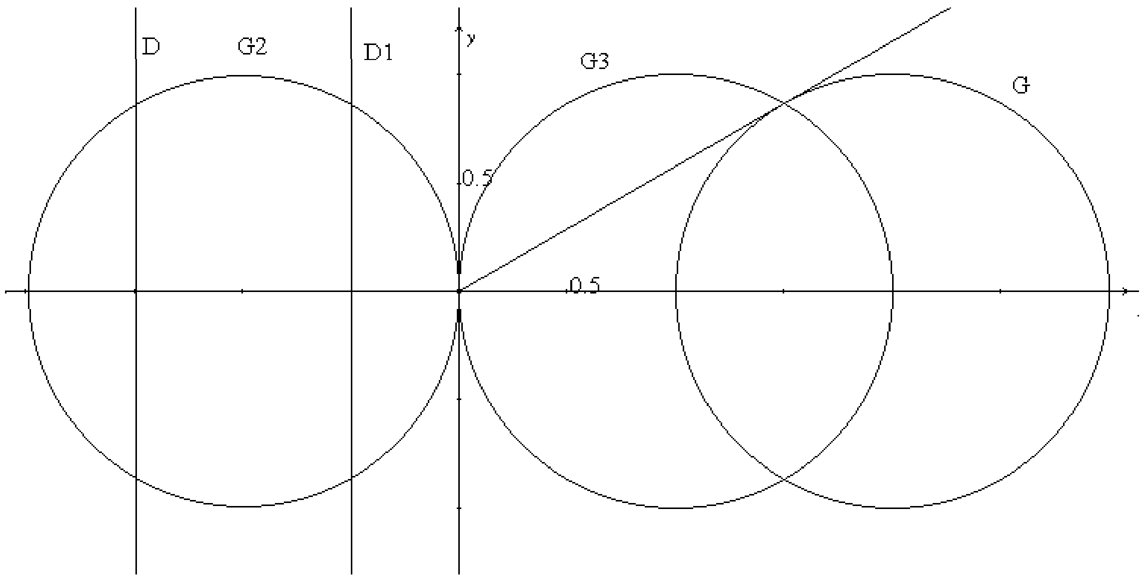
Exercice 2 - 8 points

On note a f définie par $f(m) = M$ avec $Z = \dfrac{z}{1+z} = 1 - \dfrac{1}{1+z}$ si $z \neq -1$.

Partie A

1. L'ensemble D des points d'affixe $z = -\dfrac{3}{2} + \mathrm{i}y$ avec y réel quelconque est la droite D d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$.
2. On note t_1 définie par $t_1(m) = M_1$ avec $z_1 = z + 1$; donc t_1 est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et D_1 est la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.
3. On note t_2 définie par $t_2(m) = M_2$ avec $z_2 = \dfrac{1}{z}$ et $z \neq 0$; donc t_2 est l'inversion complexe et l'image Γ_2 de D_1 est le cercle :
   - de centre $\Omega(-1\ ,\ 0)$ car son affixe est $z_\Omega = \dfrac{1}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = -1$
   - de rayon $R = \dfrac{1}{2 \times \left| -\dfrac{1}{2} \right|} = 1$

   privé de O.
4. On note t_3 définie par $t_3(m) = M_3$ avec $z_3 = -z$; donc t_3 est la symétrie centrale de centre O et l'image Γ_3 de Γ_2 par t_3 est donc le cercle (privé de O) de centre $\Omega'(1\ ,\ 0)$ et de rayon 1.
5. On a donc successivement :
$$z \to 1 + z \to \frac{1}{1+z} \to -\frac{1}{1+z} \to 1 - \frac{1}{1+z}$$
   c'est à dire :
$$m \to M_1 = t_1(m) \to M_2 = t_2(M_1) \to M_3 = t_3(M_2) \to M = t_1(M_3)$$
   Donc l'ensemble Γ cherché est l'image par t_1 du cercle Γ_3 ; c'est donc le cercle (privé de Ω') de centre $\Omega''(2\ ,\ 0)$ et de rayon 1.
6.



Partie B

1. On pose $z = -\frac{3}{2} + \mathrm{i}y \quad (y \in \mathbb{R})$ et on remarque que $Z = \frac{z}{1+z} = \frac{3-2\mathrm{i}y}{1-2\mathrm{i}y}$.
J'appelle $\varphi(y) = \arg Z = \arg(3-2\mathrm{i}y) - \arg(1-2\mathrm{i}y)$.
Je note $\theta_1 = \arg(3-2\mathrm{i}y)$ et $\theta_2 = \arg(1-2\mathrm{i}y)$; on a donc :

$$\tan\theta_1 = \frac{b}{a} = \frac{-2y}{3} \quad \text{et, de la même façon} \quad \tan\theta_2 = \frac{-2y}{1}$$

donc

$$\theta_1 = \arctan\frac{-2y}{3} \quad \text{car} \quad 3>0 \quad \text{et} \quad \theta_2 = \arctan -2y1 \quad \text{car} \quad 1>0$$

et, puisque $\arctan$ est impaire :

$$\varphi(y) = \theta_1 - \theta_2 = -\arctan\frac{2y}{3} - (-\arctan 2y) = \arctan 2y - \arctan\frac{2y}{3}$$

2. Étudions les variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$

   * φ est bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$
   * $\lim\limits_{+\infty} \varphi = 0$ puisque $\begin{cases} \lim\limits_{y\to+\infty} \arctan 2y = \frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{y\to+\infty} \arctan\frac{2y}{3} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$
   * $\lim\limits_{-\infty} \varphi = 0$ puisque φ est impaire.
   * Calculons la dérivée :

$$\begin{aligned} \varphi'(y) &= \frac{1}{1+(2y)^2}\cdot 2 - \frac{1}{1+\left(\frac{2y}{3}\right)^2}\cdot\frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{1+4y^2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{4y^2}{9}} = \frac{2}{1+4y^2} - \frac{6}{9+4y^2} \\ &= \frac{12-16y^2}{(1+4y^2)(9+4y^2)} = \frac{4(3-4y^2)}{(1+4y^2)(9+4y^2)} = \frac{4(\sqrt{3}-2y)(\sqrt{3}+2y)}{(1+4y^2)(9+4y^2)} \end{aligned}$$

   et $\varphi'(y)$ est du signe de $12-16y^2$, c'est à dire du signe de $-a = -(-16) = 16 > 0$ entre les racines, et négatif sinon ; le tableau de variation est le suivant :

y	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$\varphi'(y)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(y)$	0	$\searrow$	$-\varphi_m$	$\nearrow$	$+\varphi_m$	$\searrow$	0

   avec $\varphi_m = \arctan\left(2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arctan\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arctan\sqrt{3} - \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

3. L'argument $\varphi(y)$ est l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{OM}\right)$; il est maximum si la droite OM est tangente au cercle Γ ;
on a alors : $\sin\varphi_m = \frac{1}{2}$ d'où $\varphi_m = \frac{\pi}{6}$ (puisque $\varphi_m < \frac{\pi}{2}$).