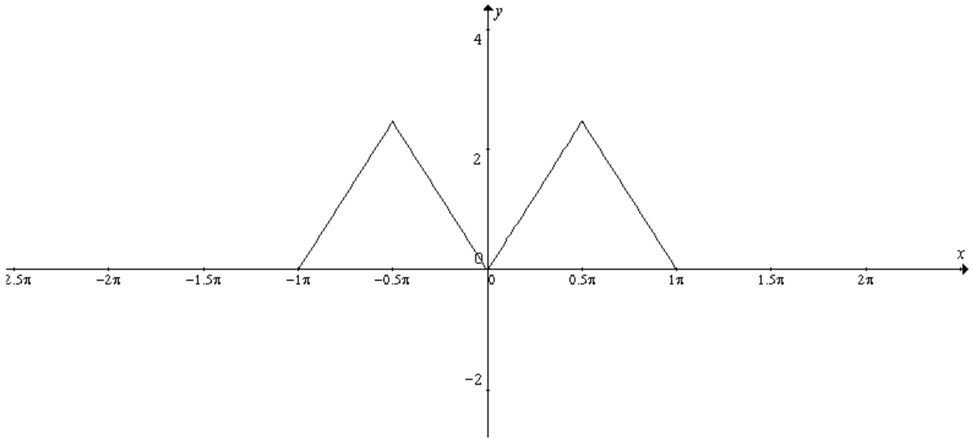
Éléments de corrigé

Exercice 1

1. f est définie sur $\mathbb{R}$, paire et périodique, de période $T = \pi$; de plus $f(t) = \dfrac{\pi}{2}t$ si $t \in \left[0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ On obtient la courbe :



2. Calculons les coefficients de Fourier a_n et b_n de la fonction f ; on a $T = \pi$, $\dfrac{2\pi}{\omega} = \pi$ donc $\omega = 2$.

   – calcul de b_n : puisque f est paire, on sait que $b_n = 0$;

   – calcul de a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}t\ \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$$

   – calcul de a_n pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos 2nt\ \mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos 2nt\ \mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}t\ \cos 2nt\ \mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t\cos 2nt\ \mathrm{d}t$$

   On intègre par parties, en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = \cos 2nt$;
   donc $u'(t) = 1$ et $v(t) = \dfrac{1}{2n}\sin 2nt$; on obtient donc :

$$a_n = 2\left[\left[\frac{t\sin 2nt}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nt}{2n}\ \mathrm{d}t\right]$$

   puisque $\sin\dfrac{2n\pi}{2} = 0$, il vient :

$$a_n = 2\left[0 - \frac{1}{2n}\left[-\frac{\cos 2nt}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{1}{2n^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{2} - \cos 0\right)$$

   d'où

$$a_n = \frac{1}{2n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

   Si n pair, $n = 2p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) on a $(-1)^n = (-1)^{2p} = 1$ donc $a_{2p} = 0$.
   Si n impair, $n = 2p+1$ on a $(-1)^n = (-1)^{2p+1} = -1$ donc $a_{2p+1} = -\dfrac{1}{(2p+1)^2}$.

3. (a) f est périodique de période $T = \pi$; de plus :

   – sur $[0\ ,\ \pi]$ f est continue (car $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} f = \dfrac{\pi^2}{4} = \lim\limits_{\frac{\pi}{2}^+} f$) et f est dérivable sauf en 0, $\dfrac{\pi}{2}$ et π.

– sur $]0\ ,\ \frac{\pi}{2}[$ on a $f'(t) = \frac{\pi}{2}$ et sur $]\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi[$ on a $f'(t) = -\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{t\to 0^+} f'(t) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} f'(t) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^+} f'(t) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\pi^-} f'(t) = -\frac{\pi}{2}$$

Aux points où f n'est pas dérivable, f' admet une limite finie à gauche et à droite. Donc f satisfait aux conditions de Dirichlet.

(b) Comme f est continue en tout point de $\mathbb{R}$, la série de Fourier de f, $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos 2nt$ converge vers $f(t)$ pour tout t réel.
Or, sur $[0\ ,\ \frac{\pi}{2}]$ $\quad f(t) = \frac{\pi}{2}t$ et sur $[\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi]$ $\quad f(t) = -\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi^2}{2}$
Donc, sur $[0\ ,\ \frac{\pi}{2}]$ $\quad S(t) = \frac{\pi}{2}t$ et sur $[\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi]$ $\quad S(t) = -\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi^2}{2}$

4. (a)

$$S(t) = \frac{\pi^2}{8} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}\ \cos(2(2p+1)t)$$

D'après ce qui précède, en $t = 0$ on aura $S(0) = f(0) = 0$ et donc :

$$\frac{\pi^2}{8} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos 0 = 0 \quad \text{d'où} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(b) Calculons le carré de la valeur efficace de f :

$$f_{eff}^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}t\right)^2\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\times 2\int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\pi^2 t^2}{4}\ \mathrm{d}t = \frac{2\pi^2}{4\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{3}\frac{\pi^3}{8} = \frac{\pi^4}{48}$$

car f étant paire, f^2 l'est aussi.
Avec la formule de Parseval $f_{eff}^2 = {a_0}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^2$
on obtient : $\frac{\pi^4}{48} = \left(\frac{\pi^2}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2p+1)^2}\right)^2$
d'où $\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{48} - \frac{\pi^4}{64} = 2\frac{\pi^4}{16}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi^4}{8}\times\frac{1}{12}$
d'où $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

Exercice 2

Partie I

1. La fonction f est constante sur l'intervalle $]-\infty\ ,\ 0[$ donc :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) = f'(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0$$

et l'équation différentielle $(E1)$ devient :

$$v' + \frac{1}{RC}v = 0$$

Cette équation est de la forme :

$$ax' + bx = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1}{RC} \end{cases}$$

D'après le formulaire :

$$g = \frac{b}{a} = \frac{1}{RC} \quad \text{d'où} \quad G(t) = \frac{t}{RC} \quad \text{et donc} \quad x(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{si} \quad t < 0.$$

De plus,

$$\lim_{t \to 0^-} v(t) = k = 0$$

donc la solution cherchée est :

$$v(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0$$

2. La fonction f est constante sur l'intervalle $]0\ ,\ +\infty[$ donc :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) = f'(t) = 0 \quad \text{si} \quad t > 0$$

et l'équation différentielle $(E1)$ est encore :

$$v' + \frac{1}{RC}v = 0$$

Cette équation est de la forme :

$$ax' + bx = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1}{RC} \end{cases}$$

D'après le formulaire :

$$g = \frac{b}{a} = \frac{1}{RC} \quad \text{d'où} \quad G(t) = \frac{t}{RC} \quad \text{et donc} \quad x(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{si} \quad t > 0.$$

Mais,

$$\lim_{t \to 0^+} v(t) = k = V_0$$

donc la solution cherchée est :

$$v(t) = V_0\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{si} \quad t > 0$$

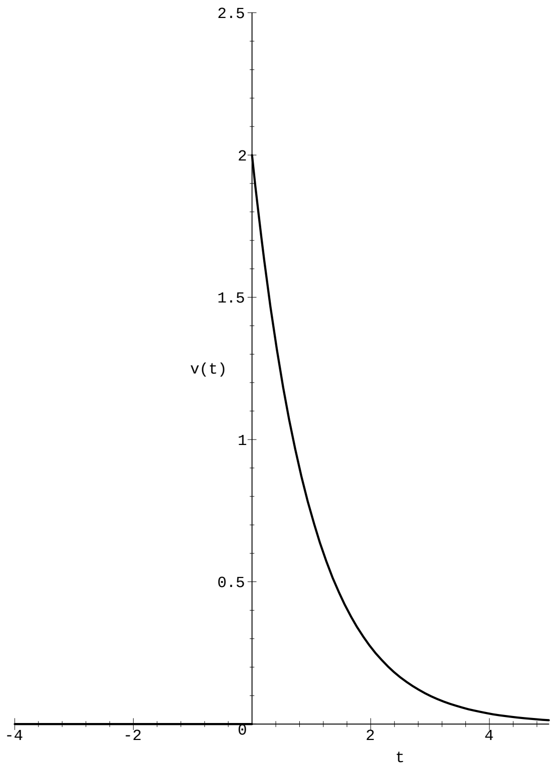
3. Donc v est constante (nulle) sur l'intervalle $]-\infty\ ,\ 0[$ et :

$$v(t) = V_0\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{si} \quad t \in]0\ ,\ +\infty[$$

donc v est décroissante sur $]0\ ,\ +\infty[$; en effet :

$$v'(t) = -\frac{V_0}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} < 0 \quad \text{car} \quad \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} > 0 \quad \text{et} \quad -\frac{V_0}{RC} < 0$$

Représentation graphique :

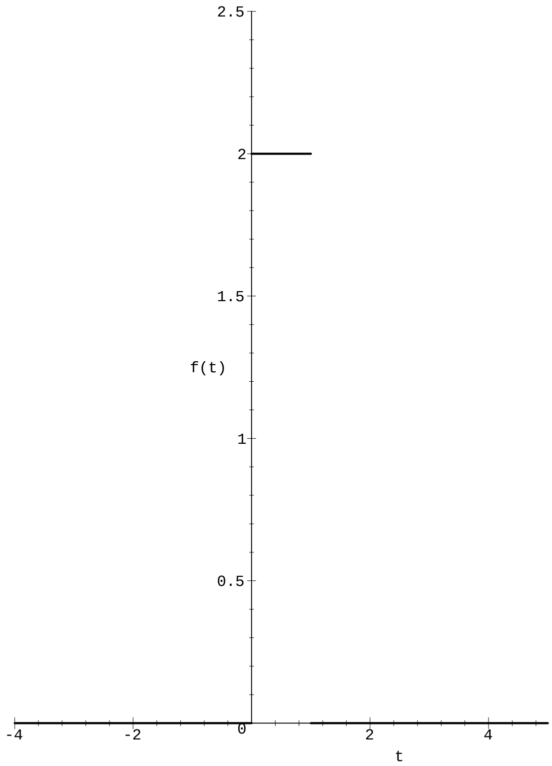


Partie II

1. On donne :

$$f(t) = V_0\,(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-\tau))$$

Donc $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ V_0 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ 0 & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$ dont la représentation graphique est :



Et sa transformée de Laplace est :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = V_0\ [\mathcal{L}[U(t)] - \mathcal{L}[U(t-\tau)]] = V_0\ \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\tau p}\right]$$

2. (a) Appliquons la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation $(E2)$; on obtient :

$$\mathcal{L}[v(t)] + \frac{1}{RC}\mathcal{L}\left[\int_0^t v(u)\,\mathrm{d}u\right] = \mathcal{L}[f(t)]$$

Donc :

$$V(p) + \frac{1}{RC}\frac{V(p)}{p} = V_0\ \left[\frac{1}{p} - \frac{\mathrm{e}^{-\tau p}}{p}\right]$$

$$V(p)\left[1 + \frac{1}{RCp}\right] = \frac{V_0}{p}\left[1 - \mathrm{e}^{-\tau p}\right]$$

Donc :

$$\begin{aligned}
V(p) &= \frac{V_0}{p}\left[1-\mathrm{e}^{-\tau p}\right]\frac{RCp}{1+RCp} \\
&= \frac{V_0\ \left[1-\mathrm{e}^{-\tau p}\right]RC}{1+RCp} \\
&= V_0\ RC\left[\frac{1}{1+RCp}-\frac{1}{1+RCp}\mathrm{e}^{-\tau p}\right] \\
&= V_0\left[\frac{1}{p+\frac{1}{RC}}-\frac{1}{p+\frac{1}{RC}}\mathrm{e}^{-\tau p}\right]
\end{aligned}$$

et donc :

$$v(t) = V_0\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\mathcal{U}(t)-\mathrm{e}^{-\frac{t-\tau}{RC}}\mathcal{U}(t-\tau)\right]$$

(b) Par conséquent :

- si $t<0$ alors $v(t)=0$;
- si $0\leqslant t<\tau$ alors $v(t)=V_0\ \left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}-0\right]=V_0\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$;
- si $t\geqslant\tau$ alors $v(t)=V_0\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\left[1-\mathrm{e}^{\frac{\tau}{RC}}\right]$.

3. (a) $v(\tau^-)=\lim\limits_{t\to\tau^-}v(t)=\lim\limits_{t\to\tau^-}V_0\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}=V_0\ \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}$.
et $V_0\ \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}<V_0$ car $\mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}<1$ puisque $-\dfrac{\tau}{RC}<0$

(b) Le "saut" σ vaut :

$$\sigma=v(\tau^-)-v(\tau)=V_0\ \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}-V_0\ \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{\tau}{RC}}\right)$$

d'où :

$$\sigma=V_0\ \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}\left[1-1+\mathrm{e}^{\frac{\tau}{RC}}\right]=V_0\ \mathrm{e}^{-\frac{\tau}{RC}}\ \mathrm{e}^{\frac{\tau}{RC}}=V_0$$

(c) Si $t\geqslant\tau$ alors $v(t)=V_0\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\left[1-\mathrm{e}^{\frac{\tau}{RC}}\right]$.

$$\text{Or :}\quad\left\{\begin{array}{lll}
V_0 & \text{est une constante positive} & \\
\text{la fonction}\ \ t\mapsto\mathrm{e}^{\frac{t}{RC}} & \text{est décroissante} & \text{puisque}\ -\dfrac{1}{RC}<0 \\
\left[1-\mathrm{e}^{\frac{\tau}{RC}}\right] & \text{est une constante négative} & \text{puisque}\ \dfrac{\tau}{RC}>0
\end{array}\right.$$

donc v est croissante, négative sur l'intervalle $[\tau\ ,\ +\infty[$.
De plus, $\lim\limits_{t\to+\infty}v(t)=0^-$ comme produit d'une exponentielle (donc positive) par un réel négatif. En résumé, sur l'intervalle $[\tau\ ,\ +\infty[$:

$$\begin{array}{c|ccc}
t & \tau & & +\infty \\
\hline
 & & & 0^- \\
v(t) & & \nearrow & \\
 & v(\tau) & &
\end{array}$$

(d) L'allure de la représentation est donc la suivante :