

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

Session 2000 Épreuve de Mathématiques - Groupe A - Durée : 3 heures

SPÉCIALITÉS	COEFFICIENT
Contrôle industriel et régulation automatique	2
Électronique	2
Génie optique	3
Informatique Industrielle	3
Électrotechnique	1
Techniques Physiques pour l'industrie et le Laboratoire	3

Le sujet comprend 3 pages, numéroté de 1 à 3
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
Il comprend 6 pages, numérotées de 1 à 6.

*La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction
interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.*

Exercice 1 (8 points)

Les objectifs de cet exercice sont d'obtenir le développement en série de Fourier d'une fonction puis d'utiliser ce développement pour obtenir les sommes de deux séries numériques.

On considère la fonction numérique définie sur \mathbb{R} , paire, périodique de période π , telle que :

$$f(t) = \frac{\pi}{2}t \quad \text{si } t \text{ appartient à l'intervalle } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$.
2. Déterminer les coefficients de Fourier réels associés à la fonction f . On précisera la valeur de a_n , suivant la parité de l'entier non nul n .
3. (a) Montrer que la fonction f vérifie les conditions d'application du théorème de Dirichlet.

$$(b) \text{ Soit } S(t) = \frac{\pi^2}{8} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos(2(2p+1)t)$$

Donner, en la justifiant la valeur de $S(t)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

4. Soient les séries numériques, convergentes, de terme général

$$u_p = \frac{1}{(2p+1)^2} \quad \text{et} \quad v_p = \frac{1}{(2p+1)^4} \quad (p \in \mathbb{N}).$$

- (a) En utilisant le développement en série de Fourier de la fonction f déterminer

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

$$(b) \text{ On rappelle la formule de Parseval: } \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

$$\text{En utilisant cette formule, déterminer } \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

Exercice 2 (12 points)

Un système physique est régi par l'équation différentielle suivante dans laquelle les nombres R et C sont des constantes strictement positives.

$$\frac{dv}{dt}(t) + \frac{1}{RC}v(t) = \frac{df}{dt}(t) \quad (E1).$$

Partie I

Dans cette partie on suppose que la fonction f est définie pour tout t réel par : $\begin{cases} f(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ f(t) = V_0 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$ où V_0 est une constante réelle strictement positive.

1. Calculer $\frac{df}{dt}(t)$ pour t appartenant à $]-\infty, 0[$ puis résoudre sur $]-\infty, 0[$ l'équation différentielle (E1) avec la condition $v(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} v(t) = 0$.
2. Calculer $\frac{df}{dt}(t)$ pour t appartenant à $]0, +\infty[$ puis résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle (E1) avec la condition $v(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} v(t) = V_0$.
3. Étudier sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ les variations de la fonction v . Donner dans un repère orthonormal, l'allure de la représentation graphique de la fonction v pour t réel non nul. On prendra, pour réaliser le graphique, $RC = 1$ et $V_0 = 2$.

Partie II

La fonction échelon unité apparaissant dans cette partie est définie par : $\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$

Dans cette partie on suppose que la fonction f est définie pour tout t réel par $f(t) = V_0 (\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - \tau))$ où τ est un réel strictement positif. Le système est alors régi par l'équation :

$$v(t) + \frac{1}{RC} \int_0^t v(u) \, du = f(t) \quad (E2).$$

1. Donner dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction f (on prendra, pour réaliser le graphique, $V_0 = 2$ et $\tau = 1$).
Déterminer la transformée de Laplace de la fonction f
2. On suppose que la fonction v est nulle pour $t < 0$, et qu'elle admet une transformée de Laplace notée $p \mapsto V(p)$.
 - (a) Résoudre, en utilisant la transformation de Laplace, l'équation (E2).
 - (b) En déduire que la fonction v est définie par:

$$\begin{cases} v(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} & \text{pour } 0 \leq t < \tau \\ v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} \left(1 - e^{\frac{\tau}{RC}}\right) & \text{pour } t \geq \tau \end{cases}$$

Dans cette question, on s'intéresse à la représentation graphique de la fonction v .

3.
 - (a) Calculer $v(\tau^-)$ définie par $v(\tau^-) = \lim_{t \rightarrow \tau^-} v(t)$ et montrer que $v(\tau^-) < V_0$.
 - (b) Montrer que le "saut" σ de la fonction v en $t = \tau$, défini par $\sigma = v(\tau^-) - v(\tau)$ est égal à V_0 .
 - (c) Étudier les variations de la fonction v pour $t \geq \tau$.
 - (d) En utilisant les résultats précédents et ceux de la partie I, question 3, donner l'allure de la représentation graphique de la fonction v dans un repère orthogonal. On prendra, pour réaliser le graphique, $RC = 1$, $V_0 = 2$ et $\tau = 1$.