**Exercice 2 : les cylindres en papier**

Commençons par des considérations générales qui serviront tout au long de l'exercice.

Pour un cylindre dont la hauteur est *h*, le rayon de base *R* et la surface de base *B*, la formule donnant le volume est : $V = B \times h = \pi R^2 h$.
Pour un cercle de rayon *R*, la formule donnant le périmètre est $p = 2\pi R$.
Si le cylindre est formé à partir d'un rectangle ou d'un parallélogramme de base *a* qu'on enroulera et de hauteur *b* qui sera aussi la hauteur du cylindre, on aura :

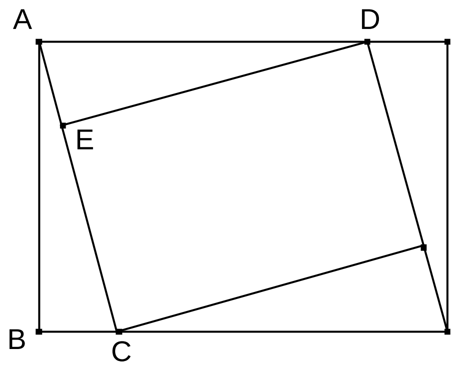
$a = 2\pi R$ d'où $R = \dfrac{a}{2\pi}$ puis $V = \pi \left(\dfrac{a}{2\pi}\right)^2 b$ soit $\boxed{V = \dfrac{1}{4\pi} a^2 b}$.

1. Prenons une feuille de papier de 21 cm de large ($l = 21$) et 29,7 cm de long ($L = 29,7$)
   Notons $a = 21 = l$ et $b = 29,7 = L$.
   Selon la façon dont on roule la feuille pour obtenir un cylindre, le volume sera :
   $\boxed{V_1 = \dfrac{1}{4\pi} L^2 l}$ ou $\boxed{V_2 = \dfrac{1}{4\pi} l^2 L}$
   Ainsi $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{L}{l}$ et comme $L \neq l$, il en découle que $\boxed{V_1 \neq V_2}$.
   Remarquons qu'<u>il n'est pas nécessaire d'effectuer des calculs pour conclure</u>.

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure donnée dans l'énoncé. Selon la façon dont on roule la feuille on obtient deux cylindres de tailles différentes.

   Pour le cylindre n°1, on a avec les notations précédentes :
   $a = 29.7 - x = L - x$ et $b = 21 = l$ d'où $\boxed{V_1 = \dfrac{1}{4\pi}(L - x)^2 l}$.

   Pour le cylindre n°2, on doit déjà calculer les valeurs de *a* et *b*.




Or (cf figure) :
$a = AC$ s'obtient en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC. Il vient $AC^2 = AB^2 + BC^2 = l^2 + x^2$ d'où $a = AC = \sqrt{l^2 + x^2}$.

Pour calculer $b = DE = h$, remarquons que les triangles *ABC* et *DEA* sont semblables.

Il vient : $\dfrac{DE}{AD} = \dfrac{AB}{AC}$ soit $\dfrac{b}{L-x} = \dfrac{l}{\sqrt{l^2+x^2}}$ d'où $b = \dfrac{l\,(L-x)}{\sqrt{l^2+x^2}}$

On a alors :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi}\left(\sqrt{l^2+x^2}\right)^2 \frac{l\,(L-x)}{\sqrt{l^2+x^2}} \quad \text{soit} \quad \boxed{V_2 = \frac{1}{4\pi} l\,(L-x)\sqrt{l^2+x^2}}\,.$$

Par suite :

$$V_1 = V_2 \iff \frac{1}{4\pi}(L-x)^2 l = \frac{1}{4\pi} l\,(L-x)\sqrt{l^2+x^2}$$

$$\iff (L-x) = \sqrt{l^2+x^2} \qquad \text{en simplifiant par } \frac{1}{4\pi}(L-x)l$$

$$\iff (L-x)^2 = l^2 + x^2$$

$$\iff L^2 + x^2 - 2Lx = l^2 + x^2$$

$$\iff L^2 - 2Lx = l^2$$

$$\iff \boxed{x = \frac{L^2 - l^2}{2L}}$$

Numériquement on obtient $L = 29{,}7$ et $l = 21$ : $\boxed{x \ \mathbf{X}\ 7.426}$.

soit $x \ \mathbf{X}\ \dfrac{29.7}{4} = 7.425$.

Autrement dit <u>il suffit de choisir pour *x* à peu près le quart de la longueur de la feuille</u>.

Le résultat peut sembler étonnant. Ce $\dfrac{1}{4}$ est-il un hasard ?

Démystifions…

En fait, le format $21 \times 29{,}7$ a été choisi de manière à ce qu'on puisse réduire deux feuilles de papier A4 en une seule.

Ceci est possible si $\dfrac{2l}{L} = \dfrac{L}{l}$ soit $L = l\sqrt{2}$.

mais 29 n'est qu'une valeur approchée (certes très bonne) de $21\sqrt{2}$.

Si le format A4 était non $21 \times 29.7$ mais $21 \times 21\sqrt{2}$ (peut-être l'est-il, il faudrait demander aux papetiers…) , l'exercice donnerait pur résultat :

$$x = \frac{L^2 - l^2}{2L} = \frac{L^2 - \frac{L^2}{2}}{2L} = \frac{L^2}{4L} \ \text{soit} \ \boxed{x = \frac{L}{4}} \qquad \text{sic….}$$