MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Académie de Poitiers

Les candidats traitent **deux exercices.**

Exercice académique n°1 : Toutes séries
Ampoules clignotantes

On dispose en ligne plusieurs ampoules électriques branchées. On les numérote à partir de 1 en partant de celle la plus à gauche.
Au départ, lors de la première minute de l'expérience, seule l'ampoule située à gauche (notée N°1) est allumée. Et elle restera toujours allumée.
Par la suite, toutes les minutes, pour les autres ampoules, l'opération suivante est réalisée : chaque ampoule change d'état (elle s'allume ou elle s'éteint) si et seulement si celle située à sa gauche était allumée lors de la minute d'avant.

1. On commence par étudier l'état des 20 premières ampoules au cours des 17 premières minutes. Par convention, une ampoule allumée sera représentée par un disque blanc et une ampoule éteinte par un disque noir.
   En annexe est fournie une représentation de ces 20 ampoules. Les 11 premières minutes de l'étude sont représentées (la première ligne correspond à la 1ère minute durant laquelle seule l'ampoule N°1 est allumée, la suivante correspond à la 2ème minute où seules les ampoules N°1 et N°2 sont allumées ...). Les minutes allant de la 15ème minute à la 17ème minute sont aussi représentées.
   Compléter l'annexe pour représenter l'état des 20 ampoules au cours des minutes 12 à 14.

2. On considère l'ampoule N°2. Quel est son état durant la $K^{\text{ème}}$ minute, pour K entier naturel non nul ? Justifier la réponse.

3. Soit K un entier naturel non nul. Expliquer pourquoi l'ampoule N°K s'allume pour la première fois lors de la $K^{\text{ème}}$ minute.

4. On souhaite décrire l'état des ampoules durant la $K^{\text{ème}}$ minute, où K est de la forme $K = 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Qu'en est-il au cours des minutes de la forme $K = 2^n$ pour n allant de 0 à 4 ?
   (b) Énoncer une généralisation pour l'état des ampoules durant une minute $K = 2^n$. On admettra le résultat.

5. Justifier que durant la $K^{\text{ème}}$ minute, où K est un entier de la forme $K = 2^n + 1$, deux ampoules seulement sont allumées.

6. Décrire l'état des ampoules entre les minutes $K = 2^n + 1$ et $K = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.
   On comparera en particulier avec l'état observé entre les minutes $K = 1$ et $K = 2^n$.

7. Soit un entier K, $K \geq 2$, on admet qu'il existe un seul entier naturel n vérifiant $2^n + 1 \leq K \leq 2^{n+1}$.
   (a) Rédiger un algorithme répondant à la problématique suivante : l'utilisateur donne un entier K et l'entier n défini ci-dessus lui est donné en sortie.
   (b) Quel est le lien entre le nombre d'ampoules allumées lors de la $K^{\text{ème}}$ minute et le nombre d'ampoules allumées lors de la minute $(K - 2^n)$?

8. L'expérience s'arrête lorsque l'ampoule N°2018 s'allume pour la première fois. Combien d'ampoules sont alors allumées ?

Annexe de l’exercice 1 toutes séries à rendre avec la copie

1ère minute	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
2nde minute	○	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
3ème minute	○	●	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
4ème minute	○	○	○	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
5ème minute	○	●	●	●	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
6ème minute	○	○	●	●	○	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
7ème minute	○	●	○	●	○	●	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
8ème minute	○	○	○	○	○	○	○	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
9ème minute	○	●	●	●	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
10ème minute	○	○	●	●	●	●	●	●	○	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
11ème minute	○	●	○	●	●	●	●	●	○	●	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●
12ème minute	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
13ème minute	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
14ème minute	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
15ème minute	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	●	●	●	●
16ème minute	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	●	●	●
17ème minute	○	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	●	●	●

Exercice académique n°2 : Série S
L'éventail japonais

Dans un éventail ouvert aux deux tiers, on inscrit cinq cercles comme indiqué sur la figure 1. Celle-ci admet pour axe de symétrie, la médiatrice de [BC].
Les cercles de la partie supérieure sont tangents entre eux, au segment $[CB]$ et à l'arc de cercle $\widehat{CB}$.
Les deux cercles de la partie inférieure sont tangents aux côtés $[OC]$ou $[OB]$, à $[CB]$ et à l'arc de cercle $\widehat{LK}$.

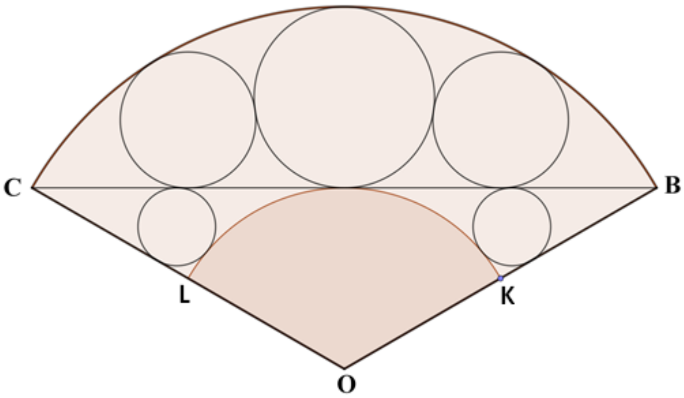
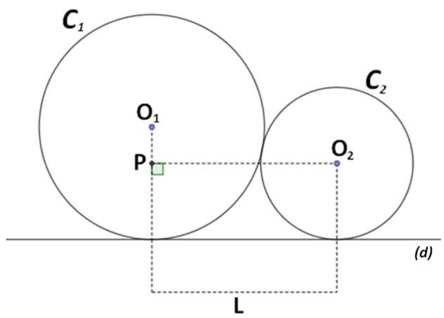


Figure 1

Pour effectuer la construction, on cherche à exprimer les rayons de chaque cercle en fonction du demi-rayon de l'éventail, soit en fonction de $R_1 = \frac{OB}{2}$.

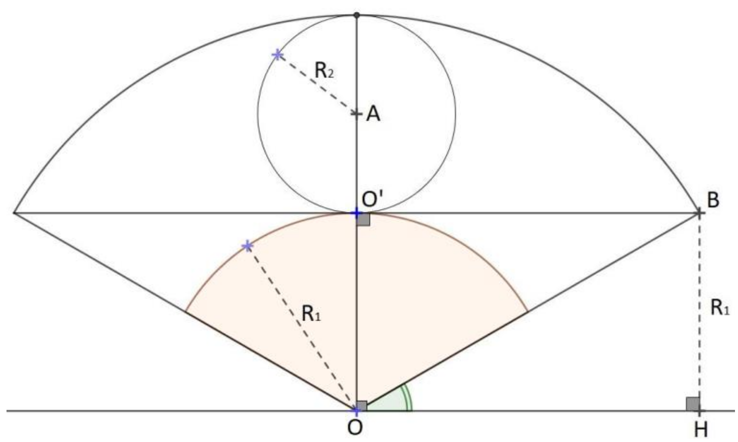
1. Préliminaire



Les cercles C_1 et C_2 ci-dessus de rayons respectifs R_1 et R_2 sont tangents entre eux et à la droite (d).
Montrer que la longueur L est égale à $2\sqrt{R_1 R_2}$.

2. Relation entre R_1 et R_2

On utilisera les notations du schéma ci-contre.
Exprimer R_2 en fonction de R_1.

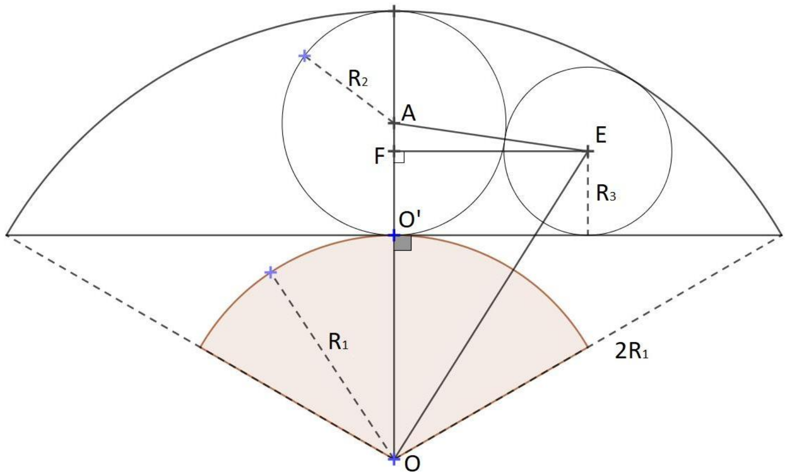


3. Relation entre R_1 et R_3

On utilisera les notations du schéma ci-contre.

a. En utilisant la partie préliminaire, exprimer les longueurs des côtés du triangle OEF en fonction de R_1 et R_3.

b. En déduire que $R_3 = \frac{3}{8} R_1$.



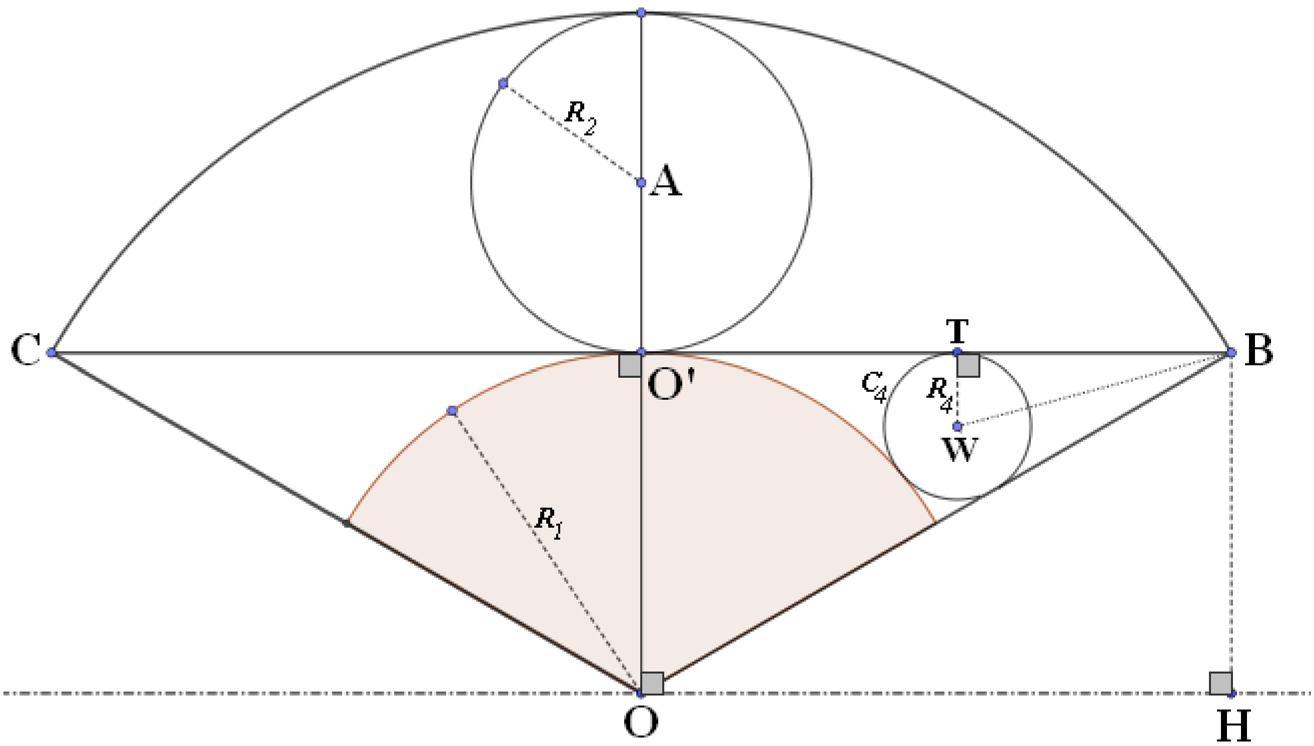
4. Relation entre R_1 et R_4

On utilisera les notations du schéma ci-contre. West le centre de C_4.
Dans cette partie, on pourra utiliser que $\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$.

a. En déduire la relation $\frac{R_4}{R_1\sqrt{3}-2\sqrt{R_1R_4}} = 2-\sqrt{3}$.

b. En posant $X = \sqrt{\frac{R_4}{R_1}}$, justifier que X est solution de l'équation : $X^2 = (2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-2X)$.

c. En résolvant cette équation, exprimer R_4 en fonction de R_1.



Exercice académique n°2 : Autres séries que S
Transformation de Collatz

La transformation de Collatz d'un nombre entier strictement positif a est définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{si } a \text{ est pair, alors } a \text{ devient } \dfrac{a}{2} \\ \\ \text{si } a \text{ est impair, alors } a \text{ devient } \dfrac{3a+1}{2} \end{cases}$$

La trajectoire du nombre a est alors constituée des valeurs prises par a au cours d'une succession de transformations de Collatz. Par exemple, on peut représenter la trajectoire de 12 ainsi :

$$12 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$$

Temps de vol et altitude maximale

- Le temps de vol de a est le nombre minimal de transformations à l'issue desquelles la trajectoire de a atteint 1, si cela arrive. On le note $t(a)$.
- L'altitude maximale de a est le plus grand nombre apparaissant dans la trajectoire de a. On la note $m(a)$.

Par exemple, le temps de vol de 12 est $t(12) = 7$ et son altitude maximale est $m(12) = 12$.

1) Déterminer la trajectoire de 13, ainsi que $t(13)$ et $m(13)$.

2) L'algorithme suivant doit calculer $t(a)$ et $m(a)$, le nombre entier strictement positif a étant donné en entrée.
Compléter cet algorithme.

Entrée : nombre entier strictement positif a.
Sorties : temps de vol t, altitude maximale m.

$t = 0$
$m = a$

Tant que a est différent de 1, faire :

  Si a est pair, alors a prend la valeur ....
    sinon a prend la valeur ....
  Fin si

  t prend la valeur ....

  Si $a > m$, alors ....
  Fin si

Fin tant que

Afficher t
Afficher m

3) Calculer les 7 premiers termes de la trajectoire de 27, puis les 10 premiers termes de la trajectoire de 2018. Que dire alors de la trajectoire de ces deux nombres ?

4) L'algorithme précédent appliqué à $a = 27$ donne $t(27) = 71$ et $m(27) = 4616$. Déterminer $t(2018)$ et $m(2018)$.

5) Combien existe-t-il de trajectoires dont le temps de vol vaut 6 ?