Correction de « l'éventail japonais »

Exercice académique n°2 : série S

1. **Préliminaire**

Dans le triangle O_1O_2P rectangle en P, le théorème de Pythagore donne : $(R_1+R_2)^2 = L^2 + (R_1-R_2)^2$. Après développement et réduction, $L^2 = 4R_1R_2$ ce qui montre le résultat annoncé : $L = 2\sqrt{R_1R_2}$.

2. **Relation entre R_1 et R_2**

On a : $OB = R_1 + 2R_2$. De plus, la figure étant symétrique par rapport à (OO') et l'éventail étant ouvert aux deux tiers, l'angle $\widehat{O'OB}$ mesure $\frac{\pi}{3}$. Dans le triangle $OO'B$ rectangle en O', on a : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{OO'}{OB}$. Soit $\frac{1}{2} = \frac{R_1}{R_1+2R_2}$, ce qui montre que $R_1 = 2R_2$.

3. **Relation entre R_1 et R_3**

a) En utilisant la partie préliminaire dans le triangle AFE rectangle en F, on trouve : $EF = 2\sqrt{R_2R_3}$. Comme, $R_2 = \frac{1}{2}R_1$, on trouve : $EF = \sqrt{2R_1R_3}$. Par ailleurs, on a : $OF = R_1 + R_3$ et $OE = 2R_1 - R_3$.

b) Le triangle OEF étant rectangle en F, le théorème de Pythagore donne : $(2R_1 - R_3)^2 = 2R_1R_3 + (R_1+R_3)^2$. Après développement et réduction, cela donne : $3{R_1}^2 == 8R_1R_3$. Ainsi $R_1\,(3R_1 - 8R_3) = 0$. D'où $R_3 = \frac{3}{8}R_1$.

4. **Relation entre R_1 et R_4**

a) On a $\widehat{O'BO} = \frac{\pi}{6}$. Si on considère T' le projeté orthogonal de W sur (OB), on a $\tan\widehat{TBW} = \tan\widehat{T'BW} = \frac{R_4}{BW}$ et on a alors $\widehat{TBW} = \widehat{T'BW} = \frac{\pi}{12}$. Par conséquent $\tan\widehat{TBW} = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{R_4}{BT}$. Calculons BT. Pour cela, on décompose $BT = O'B - O'T$. Dans $OO'B$ rectangle en O', on a $O'B = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times 2R_1 = R_1\sqrt{3}$. Pour calculer $O'T$, on définit le point W', projeté orthogonal de W sur (OO'). Ainsi $O'T = WW'$. Dans le triangle OWW' rectangle en W', le théorème de Pythagore donne : $(R_1+R_4)^2 = O'T^2 + (R_1 - R_4)^2$. Après développement et réduction, on obtient : $O'T = 2\sqrt{R_1R_4}$. Finalement, $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3} = \frac{R_4}{R_1\sqrt{3} - 2\sqrt{R_1R_4}}$.

b) En utilisant la relation précédente on trouve : $2 - \sqrt{3} = \dfrac{\frac{R_4}{R_1}}{\sqrt{3} - 2\sqrt{\frac{R_4}{R_1}}}$

En posant $X = \sqrt{\frac{R_4}{R_1}}$, on a : $2 - \sqrt{3} = \frac{X^2}{\sqrt{3} - 2X}$. , on obtient alors $X^2 = (2-\sqrt{3})(\sqrt{3} - 2X)$.

c) L'équation précédente équivaut à $X^2 + (4 - 2\sqrt{3})X + 3 - 2\sqrt{3} = 0$.

Les solutions de l'équation sont -1 et $(2\sqrt{3} - 3)$. La solution qui convient ici est la solution positive.

$\sqrt{\frac{R_4}{R_1}} = (2\sqrt{3} - 3)$ ce qui donne $\frac{R_4}{R_1} = (2\sqrt{3} - 3)^2 = 21 - 12\sqrt{3}$, et $R_4 = (21 - 12\sqrt{3})R_1$.