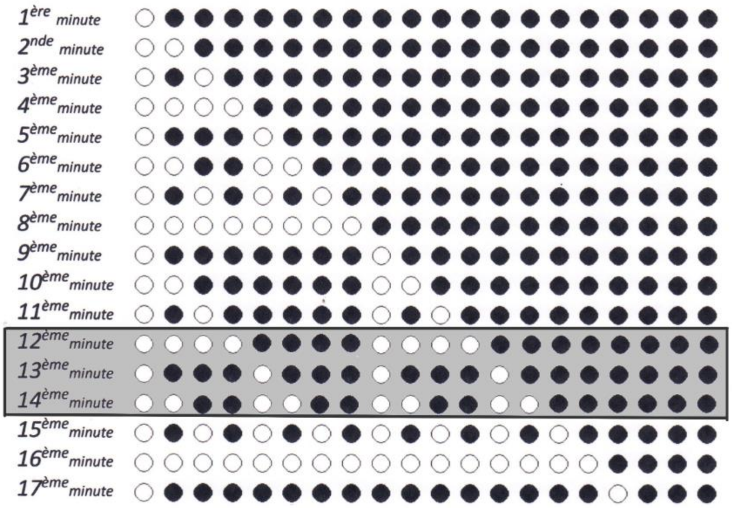
Correction « des ampoules clignotantes »

Exercice académique n°1 : toutes séries

1. Voici l'annexe complétée :



2. Au départ, lors de la minute 1, l'ampoule N°2 est éteinte. L'ampoule N°1 étant toujours allumée, la N° 2 va changer d'état chaque minute.
Lors d'une minute K impair, elle sera donc éteinte, et lors d'une minute K pair, elle sera allumée.

3. Lors de la minute 1, seule l'ampoule N°1 est allumée. Lors de la minute 2, l'ampoule N°2 précédemment éteinte s'allume car l'ampoule N°1 était allumée la minute précédente. Par conséquent l'ampoule N°3 s'allume pour la première fois à la 3ème minute, car elle éteinte auparavant.
De proche en proche, en utilisant le même raisonnement, lors de la $K^{ème}$ minute, l'ampoule N°K est allumée pour la première fois et celles situées à sa droite sont éteintes.

4. On souhaite décrire l'état des ampoules durant une minute K, où K est de la forme $K = 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
(a) Pour n allant de 0 à 4, on observe que les ampoules numérotées de 1 à $K = 2^n$ sont allumées lors de la minute $K = 2^n$, et les autres sont éteintes.

(b) On peut généraliser ainsi (conjecture) :
Pour tout entier naturel n, les ampoules numérotées de 1 à $K = 2^n$ sont allumées lors de la minute $K = 2^n$, et les autres sont éteintes.

5. Soit n un entier naturel. On utilise le résultat précédent admis :
Les ampoules numérotées de 2 à $2^n + 1$ sont les seules à changer d'état lors du passage de la minute 2^n à la minute $2^n + 1$. Les ampoules numérotées de 2 à 2^n s'éteignent et celle numérotée $2^n + 1$ s'allume.
Ainsi lors de la minute $K = 2^n + 1$, seulement les ampoules numérotées 1 et $2^n + 1$ sont allumées.

6. Si l'on considère les ampoules numérotées de 1 à 2^n, elles sont exactement dans le même état lors de la minute 1 et de la minute $2^n + 1$. Une ampoule étant influencée seulement par l'ampoule située à sa gauche, l'état de ces ampoules va se répéter lors des 2^n minutes suivantes, c'est-à-dire lors des minutes allant de $K = 2^n + 1$ à $K = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.
De même, lors de la minute $2^n + 1$, l'ampoule N°$(2^n + 1)$ est allumée et les suivantes sont éteintes, tout comme l'ampoule N°1 et les suivantes lors de la minute 1. Avec le même argument, on conclut que l'état des ampoules numérotées de $(2^n + 1)$ à 2^{n+1} entre les minutes allant de $K = 2^n + 1$ à $K = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ est le même que celui des ampoules numérotées de 1 à 2^n entre les minutes allant de 1 à 2^n.

7. Soit un entier K, $K \geq 2$, on admet qu'il existe un seul entier naturel n vérifiant $2^n + 1 \leq K \leq 2^{n+1}$.
(a) Algorithme :
Demander à l'utilisateur la valeur K.
$n \longleftarrow 0$
tant que $K > 2^{n+1}$, faire
$\quad n \longleftarrow n + 1$
retourner n.

(b) La réponse précédente permet de dire que le schéma représenté par les 2^{n+1} premières ampoules lors de la minute K correspond à celui des 2^n premières ampoules lors de la minute $(K-2^n)$, mais répétées deux fois. Le nombre d'ampoules allumées lors de la minute K est donc le double de celui des ampoules allumées lors de la minute $(K-2^n)$.

8. On note N_{2018} le nombre d'ampoules allumées lors de la minute 2018, lorsque la 2018ème ampoule s'allume pour la première fois.
Comme $2^{10}+1 \leq 2018 \leq 2^{11}$, on en déduit que $N_{2018} = 2 \times N_{2018-2^{10}} = 2 \times N_{994}$.
Comme $2^{9}+1 \leq 994 \leq 2^{10}$, on en déduit que $N_{994} = 2 \times N_{994-2^{9}} = 2 \times N_{482}$.

Comme $2^{8}+1 \leq 482 \leq 2^{9}$, on en déduit que $N_{482} = 2 \times N_{482-2^{8}} = 2 \times N_{226}$.
Comme $2^{7}+1 \leq 226 \leq 2^{8}$, on en déduit que $N_{226} = 2 \times N_{226-2^{7}} = 2 \times N_{98}$.
Comme $2^{6}+1 \leq 98 \leq 2^{7}$, on en déduit que $N_{98} = 2 \times N_{98-2^{6}} = 2 \times N_{34}$.
Comme $2^{5}+1 \leq 34 \leq 2^{6}$, on en déduit que $N_{34} = 2 \times N_{34-2^{5}} = 2 \times N_{2}$.
Or $N_2 = 2$, donc on obtient $N_{2018} = 2^7 = 128$.
La réponse attendue est 128 ampoules.