RESTAURATION D'UN VITRAIL

Correction

Partie 1 : Rectangle d'aire maximale

1. On note O le milieu de $[AB]$.
   Le triangle OBC est rectangle en O. Le théorème de Pythagore fournit : $OC = \sqrt{BC^2 - OB^2} = \sqrt{3}$.
   Ainsi l'ordonnée de C est $y_C = \sqrt{3}$.
   $M \in [OB]$ et $N \in [CB]$ avec $(MN)//(OC)$ (car $MNPQ$ est un rectangle), le théorème de Thalès dans le triangle OBC donne $\dfrac{MN}{OC} = \dfrac{MB}{OB}$, soit $MN = \sqrt{3}MB$.
2. Par symétrie, $AQ = MB = t$ donc $MQ = 2 - 2t = 2(1-t)$.
   $f(t) = aire(MNPQ) = MQ \times MN = 2(1-t) \times \sqrt{3}t = -2\sqrt{3}t^2 + 2\sqrt{3}t$.
3. La fonction f est un trinôme du second degré. Son coefficient dominant est $-2\sqrt{3} < 0$, elle admet donc un maximum en $t = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2 \times (-2\sqrt{3})} = \dfrac{1}{2}$.

   Ainsi, pour M milieu de $[OB]$, l'aire du rectangle $MNPQ$ est maximale et vaut $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ce rectangle a pour dimensions $MQ = 1$ et $MN = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Partie 2 : Rectangles gigognes

1. Les droites (AB) et (PN) sont parallèles. Les triangles CPN et CAB sont en configuration de Thalès.
   $PN = QM = 2(1-t) = 2 \times \dfrac{1}{2} = 1 = \dfrac{1}{2}AB$, donc le triangle NPC est une réduction du triangle ABC avec un coefficient de $\dfrac{1}{2}$ pour les longueurs.
2. Le deuxième rectangle est une réduction du premier avec un coefficient de $\dfrac{1}{2}$ pour les longueurs, donc de $\dfrac{1}{4}$ pour les aires. Ainsi $a(2) = \dfrac{1}{4}a(1) = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ car on a obtenu en Partie 1 $a(1) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   De même, le troisième rectangle a une aire correspondant au quart de celle du deuxième. $a(3) = \dfrac{1}{4}a(2) = \dfrac{\sqrt{3}}{32}$.
3. $S(n) = a(1) + a(2) + a(3) + ... + a(n)$.
4. Lorsque le processus se poursuit, chaque nouveau rectangle s'obtient par une réduction du précédent avec un coefficient de $\dfrac{1}{2}$ pour les longueurs, donc de $\dfrac{1}{4}$ pour les aires.
   On trouve ainsi $a(n) = \dfrac{1}{4}a(n-1) = \dfrac{1}{16}a(n-2) = ... = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} a(1) = \dfrac{1}{4^{n-1}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4^n}$ pour tout $n \geq 1$.
   Ainsi $S(n) = a(1) + \dfrac{1}{4}a(1) + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 a(1) + ... + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} a(1) = a(1)\left(1 + \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + ... + + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right)$
   On applique la formule donnée avec $q = \dfrac{1}{4}$, on obtient : $S_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(1 - \dfrac{1}{4^n}\right)$.
5. Si l'on continuait le processus avec une infinité d'étapes, on obtiendrait une infinité de rectangles. L'aire totale S correspondrait à la valeur de S_n pour n très grand.
   Pour n très grand, $\dfrac{1}{4^n}$ s'approche de 0, et alors $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(1 - \dfrac{1}{4^n}\right)$ s'approche de $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(1-0) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
   La partie du vitrail coloré en bleu ainsi obtenue aurait une aire valant $\dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{3} \times \sqrt{3}$, équivalente à $\dfrac{2}{3}$ de celle du triangle ABC, qui a pour aire $\sqrt{3}$.

Barème

Partie 1 :

1. 1,5 pt
2. 1 pt
3. 1,5 pt

Partie 2 :

1. 1 pt
2. 1 pt
3. 0,5 pt
4. 2 pts
5. 1,5 pt