DROITES EN POSITION GÉNÉRALE

Correction :

Partie 1 :

1.

Nombre de droites n	Nombre de zones z_n
0	1
1	2
2	4
3	7
4	11

2. (a)

   (b)

   (c) La droite $\mathcal{D}_5$ a coupé 5 zones.
   Chacune de ces zones étant coupée en deux, on a donc 5 zones supplémentaires et $z_5 = z_4 + 5 = 16$.

3. (a) La n-ième droite $\mathcal{D}_n$ va couper successivement $n-1$ droites. Avant de couper la première droite, elle coupe une première zone en deux, puis avant de couper une deuxième droite, elle coupe une autre zone en deux, et ainsi de suite jusqu'à couper en deux une dernière zone après avoir coupé la dernière droite présente dans la figure (la $n-1$-ème). On a donc n zones coupées en deux.

   (b) On peut donc dire que $z_n = z_{n-1} + n$.

   De proche en proche $z_n = n+z_{n-1} = n+(n-1)+z_{n-2} = n+(n-1)+(n-2)+...+1+z_0 = \dfrac{n(n+1)}{2}+1$.

   (Pour $n = 5$, on trouve $\dfrac{5\times(5+1)}{2} + 1 = 16 = z_5$)

4. On résout l'équation $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1 = 2017$ d'inconnue entière n.

   C'est une équation du second degré : $n^2 + n - 4032 = 0$

   $\Delta = 16129 = 127^2 > 0$, une racine positive $n = 63$.

   On peut donc délimiter 2017 zones avec 63 droites en position générale.

Partie 2 : Nombre de triangles

1.

Nombre de droites n	Nombre de zones t_n
0	0
1	0
2	0
3	1
4	4

2. (a) Chaque nouveau triangle a un côté porté par la nouvelle droite $\mathcal{D}_5$.
   Les cinq droites étant en position générale, trois d'entre elles font toujours apparaître un triangle.
   Les nouveaux triangles obtenus en traçant $\mathcal{D}_5$ sont donc les triangles comportant un côté sur $\mathcal{D}_5$ et les deux autres sur deux des quatre autres droites.

   (b) Les paires de droites possibles sont :
   $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2$ $\quad$ $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_3$ $\quad$ $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_4$ $\quad$ $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_3$ $\quad$ $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_4$ $\quad$ $\mathcal{D}_3/\mathcal{D}_4$
   Il y a donc 6 paires possibles, donc 6 nouveaux triangles.
   On peut écrire $t_5 = t_4 + 6 = 10$.

3. Les nouveaux triangles apparus avec la droite $\mathcal{D}_n$ sont ceux dont un des trois côté est porté par cette droite, et donc dont les deux autres côtés sont portés par deux autres droites. Il y a donc autant de nouveaux triangles que de paires de droites déjà présentes :

   $n-2$ paires avec $\mathcal{D}_1$ ($\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_2 \qquad \mathcal{D}_1/\mathcal{D}_3 \qquad ... \qquad \mathcal{D}_1/\mathcal{D}_{n-1}$)

   $n-3$ autres paires avec $\mathcal{D}_2$ ($\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_3 \qquad \mathcal{D}_2/\mathcal{D}_4 \qquad ... \qquad \mathcal{D}_2/\mathcal{D}_{n-1}$)

   ...

   1 autre paire avec $\mathcal{D}_{n-2}$ ($\mathcal{D}_{n-2}/\mathcal{D}_{n-1}$)

   Soit au total $(n-2)+(n-3)+...+1 = \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$ paires de droites déjà présentes, et autant de nouveaux triangles.

   On trouve donc : $t_n = t_{n-1} + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.

4. En poursuivant les deux tableaux, on trouve $z_6 = 22$, $z_7 = 29$, et $t_6 = 20$, $t_7 = 35$.

   Avec 7 droites en position générale, le nombre de triangles est supérieur au nombre de zones.

Barème :

Partie 1 :

1. 1 pt
2. (a) 0,25 pt
   (b) 0,25 pt
   (c) 0,5 pt
3. (a) 1 pt
   (b) 1 pt
4. 1 pt

Partie 2 : Nombre de triangles

1. 1 pt
2. (a) 1 pt
   (b) 1 pt
3. 1,5 pt
4. 0,5 pt