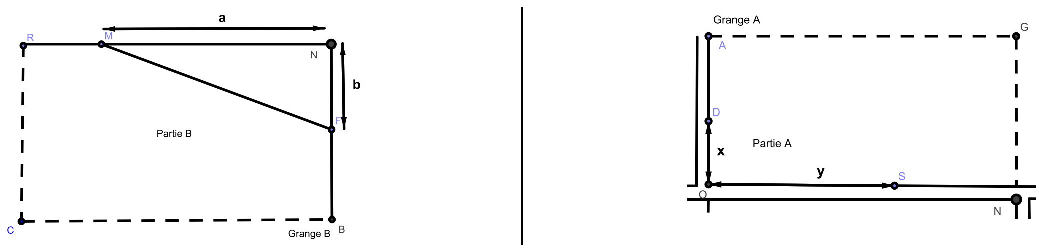
Elements de correction

Exercice 1 :

Partie 1 : Le trajet en un minimum de temps

1. Le temps mis par l'agriculteur s'il emprunte les chemins et la route seulement : $T_1 = \dfrac{distance}{vitesse}$
   $\Leftrightarrow T_1 = \dfrac{6}{5} = 1.2h = 1h12min$
2. Le temps mis par l'agriculteur s'il décide de traverser les champs A et B sans emprunter les chemins :
$$T_2 = \frac{\sqrt{(1.5)^2 + (1.5)^2}}{4} + \frac{\sqrt{(1.5)^2 + (1.5)^2}}{3}$$
$$T_2 = 1.237h = 1h14min$$
3. On se place sur la zone B, et on suppose que le tracteur quitte la route en un point M et rejoint le chemin au point F.
   le temps du trajet MF à travers champ est : $T_c = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}$ et le temps du trajet suivant la route et le chemin MNF : $T_r = \dfrac{a+b}{5}$
   On a
$$T_c^2 - T_r^2 = \frac{a^2+b^2}{9} - \frac{a^2-2ab+b^2}{25}$$
   Equivalent à : $T_c^2 - T_r^2 = \dfrac{9(a-b)^2 + 7(a^2+b^2)}{225}$ qui est toujours positif .
   Ceci montre que $T_c \geq T_r$, donc sur la zone B l'agriculteur a intérêt à prendre la route et le chemin.
4. On se place maintenant sur la zone A, et on suppose que le tracteur quitte le chemin en un point D et rejoint la route au point S.



   a) Le temps du trajet de la grange A à la grange B en fonction de x et de y :
$$T = \frac{1.5-x}{5} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4} + \frac{4.5-y}{5}$$
   On suppose que x est fixé et qu'il existe un reél α tel que $y = \alpha x$

   b) En remplace y par αx dans l'expression de T, on a alors :
$$T(\alpha) = \frac{1.5-x}{5} + x\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{4} + \frac{4.5-\alpha x}{5}$$
   Equivalent à dire que
$$T(\alpha) = \frac{6}{5} + x(\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{4} - \frac{1}{5} - \frac{\alpha}{5})$$

   c) On a $T'(\alpha) = x(\dfrac{\alpha}{4\sqrt{1+\alpha^2}} - \dfrac{1}{5})$
$$T'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow 9\alpha^2 = 16$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{4}{3}$$

Le minimum T_m de la fonction T est atteint pour $\alpha = \dfrac{4}{3}$.

d) En remplace α par sa valeur

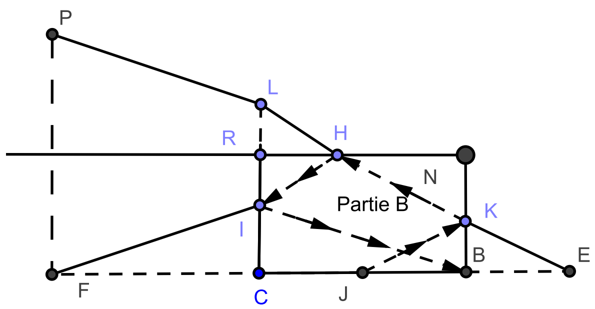
$$T_m = \frac{6}{5} + x(\frac{5}{12} - \frac{1}{5} - \frac{4}{15}) \Leftrightarrow T_m = \frac{24 - x}{20}.$$

En déduit alors que T_m est minimal si x est maximal.

5. La longueur du trajet sur la zone A : $x = 1.5km$ et $y = \dfrac{4}{3}x = 2km$, la distance à travers champ est de $\sqrt{x^2 + y^2} = 2.5km$
   La longueur du trajet sur la zone B : $a = 1km$ et $b = 1.5km$, la distance parcourue sur la zone B est de $a + b = 2.5km$
   La distance totale pour aller de la grange A à la grange B est de $5km$.
6. La durée de ce trajet : $T = \dfrac{2.5}{4} + \dfrac{2.5}{5} \Rightarrow T = 1.125h = 1h7min$

Partie 2 : Le trajet minimal

1. Soit E le symétrique de J par rapport à B, F le symetrique de B par rapport à C , L le symetrique de I parapport à R et P le symetrique de F par rapport à la droite (NR)



Comme les symétries conservent les distances alors on a :

$$JK + KH + HI + IB = EK + KH + HL + LP$$

Il est clair que cette dérnière distance est minimale si les cinq points $E,\ K,\ H,\ L\ \ etP$ sont alignés. On place alors les points fixes E , F et P, l'intersection de la droite (EP) avec les côtés $[BN]$ et $[NR]$ nous donne les positions optimale K et H. L'intersection de la droite (FH) avec le côté $[RC]$ nous donne la troisième position I.

2. Si l'agriculteur suit un tel trajet, alors le triangle EFP est rectangle en F on a :

$$EP^2 = EF^2 + FP^2 \Leftrightarrow EP = \sqrt{(7.5)^2 + 3^2}$$

La longueur du trajet optimal est $EP = 8.077km$

Barème :

Partie 1 :

1. 0.5 pt
2. 1 pt
3. a) 1 pt
   b) 0,5 pt
4. a) 1 pt
   b) 0,5 pt
   c) 1 pt
   d) 0,5 pt
5. 1 pt

Partie 2 :

1. 2 pt
2. 1 pt