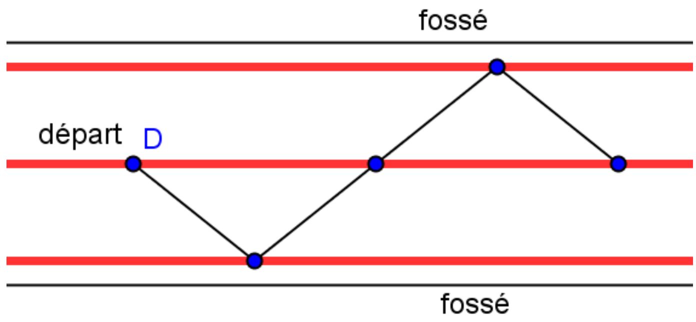
promenades dangereuses
corrigé

PARTIE A
Voilà les 8 emplacements pour les termes de cette suite qui commence par 1 :
1 . . . .

La somme des termes de rang multiple de 3 est 2 donc les 3ème et 6ème termes sont forcément égaux à 1.
1 . 1 . . 1 . .
La somme des termes de rang pair est -2, donc les 2ème, 4ème et 8ème terme sont égaux à -1, puisque le 6ème est 1.
1 -1 1 -1 . 1 . -1

La somme des termes déjà déterminés est 0, et la somme des 8 termes est +2, donc chaque terme manquant est «égal à +1.
On obtient finalement : +1 -1 +1 -1 +1 +1 +1 -1

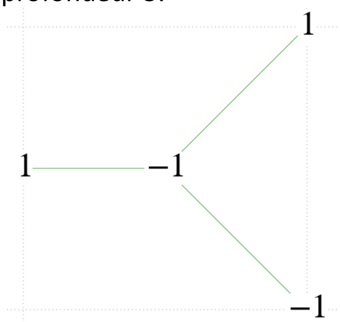
Partie B
1°) La suite U est définie par ses 9 termes :
1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1
L'ami n°2 ne lit que les termes de rang pair, c'est à dire : -1 1 1 -1
Il ne fera que 4 pas, voilà sa trajectoire :



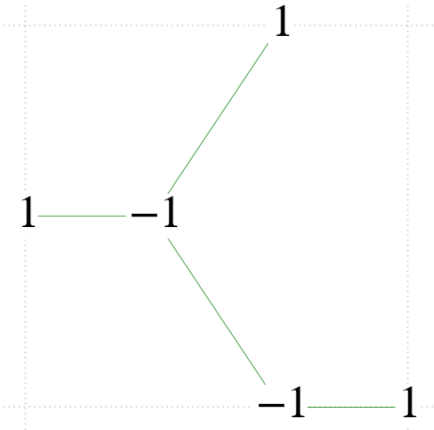
2°) Les amis n°5, n°6, n°7 ne peuvent tomber dans le fossé, puisqu'ils ne feront qu'un seul pas.
Seuls les 4 premiers amis sont susceptibles de tomber dans un fossé. L'examen de leurs trajectoires montre que, guidé par la suite V, aucun d'eux ne tombe dans un fossé.
Pour qu'il tombe tous les 4 dans un fossé en changeant un seul terme, il <u>faut</u> changer un terme qui influence les trajectoires des amis 1, 2, 3 et 4, donc un terme dont le rang est un multiple de 1, 2, 3, et 4, donc un rang au minimum égal à 12. C'est donc impossible puisqu'il n'y a que 9 termes dans la suite.

PARTIE C

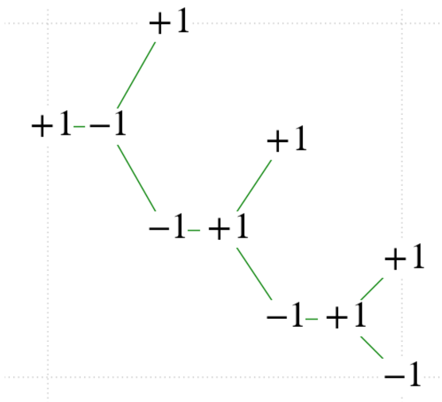
Pour déterminer les suites sécurisées de longueur 7, le mieux est de fabriquer un arbre des possibilités qui permet de déterminer la totalité des suites sécurisées.
Ces suites sécurisées commencent par 1 et le second terme est forcément -1, sinon l'ami 1 tomberait dans un fossé au 2ème pas.
Le troisième terme de la suite peut être +1 ou -1.
On obtient donc le début de l'arbre, de profondeur 3.



Si le troisième terme est 1, le quatrième ne peut être 1, car alors la somme des 4 premiers termes serait 2, et donc l'ami n°1 tomberait dans le fossé de gauche au 4ème pas.
Si le troisième terme est 1, le quatrième terme ne peut être -1, car alors la somme des termes de rang pair serait -2, et l'ami n°2 tomberait dans le fossé de droite lors de son 2ème pas.
Si le troisième terme est -1, le quatrième ne peut être -1, car alors la somme des 4 premiers termes serait -2, et l'ami n°1 tomberait dans le fossé de droite au 4ème pas. Par contre le quatrième terme peut être 1. Ainsi l'arbre précédent se prolonge et devient un arbre de profondeur 4.



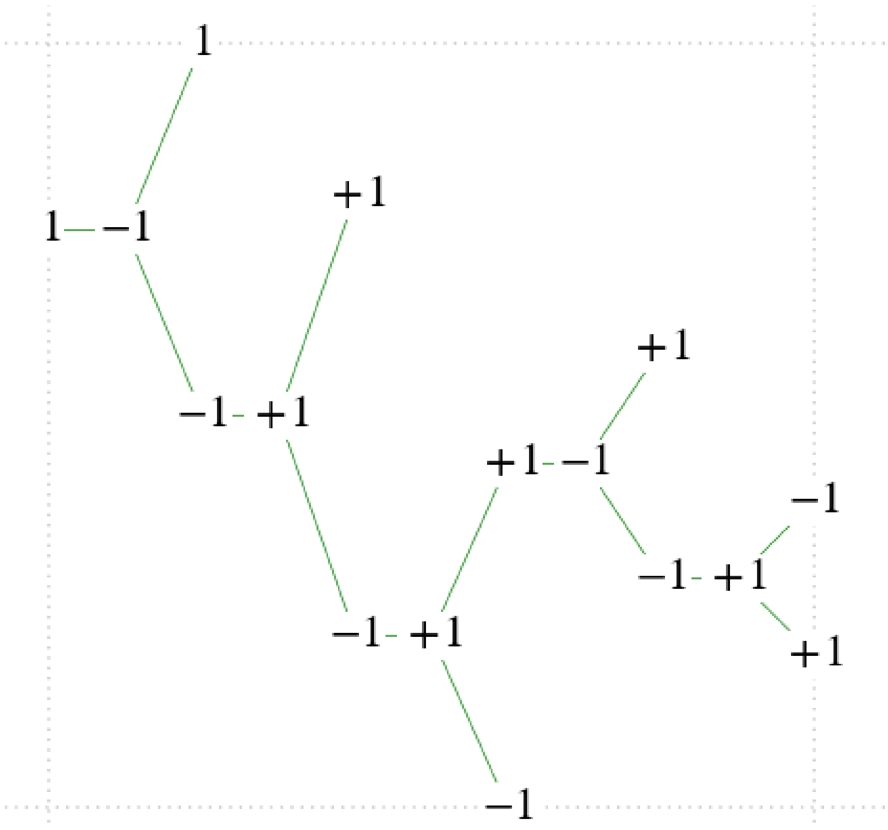
En tenant le même type de raisonnement on peut prolonger cet arbre jusqu'à la profondeur 7.



On obtient deux suites unitaires sécurisées de longueur 7 qui sont :

U1 :	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1
U2 :	+1	-1	-1	+1	-1	+1	-1

2°) Pour montrer qu'il n'y a pas de suite sécurisée de longueur 12, on peut prolonger l'arbre précédent jusqu'à la profondeur 11. On obtient l'arbre suivant :



Si le 11ème est -1, on obtient la suite suivante :

1 -1 -1 +1 -1 +1 +1 -1 -1 +1 -1

la somme de ces 11 termes est -1, donc le 12ème terme doit être +1, sinon l'ami n°1 tomberait dans le fossé de droite au 12ème pas.
Cependant la somme des termes de rang pair est 1, et donc le 12ème terme ne peut être 1 car l'ami n°2 tomberait dans le fossé de gauche à son 6ème pas.
Donc la suite ci dessus ne peut être prolongée.
Si le 11ème terme est +1, on obtient la suite suivante :

1 -1 -1 +1 -1 +1 +1 -1 -1 +1 +1

La somme de ces 11 termes est 1, donc le 12ème terme doit être -1.
Cependant la somme des termes dont le rang est multiple de 3 est -1, donc le 12ème terme ne peut être -1, car alors l'ami n°3 tomberait dans le fossé de droite à son 4ème pas.
Donc la suite ci dessus ne peut être prolongée.
<u>Conclusion</u> : Il n'existe pas de suite sécurisée de longueur 12.

<u>autre méthode :</u>
Cette autre méthode permet de répondre à cette question sans faire d'arbre .
Supposons qu'il existe une suite sécurisée de longueur 12.
Le deuxième terme est forcément -1, sinon l'ami n°1 tombe dans un fossé au 2ème pas.

1 -1 . . . .

Mais alors le quatrième terme est forcément +1, sinon l'ami n°2 tombe dans un fossé au 2ème pas.

1 -1 . +1 . . . .

Le 8ème terme est forcément -1, sinon l'ami n°4 tombe dans un fossé au 2ème pas.

1 -1 . +1 . . . -1 . . . .

Le 3ème terme ne peut être +1, sinon l'ami n°1 tombe dans le fossé au 4ème pas.

1	-1	-1	+1	.	.	.	-1	.	.	.	.

Le 6ème terme doit être 1, sinon l'ami n°3 tomberait dans un fossé au 2ème pas.

1	-1	-1	+1	.	+1	.	-1	.	.	.	.

Le 12ème terme doit être -1, sinon l'ami n°6 tomberait dans un fossé au 2ème pas.

1	-1	-1	+1	.	+1	.	-1	.	.	.	-1

Le 5ème terme ne peut être 1, car l'ami n°1 tomberait dans un fossé au 6ème pas.

1	-1	-1	+1	-1	+1	.	-1	.	.	.	-1

Le 10ème terme est forcément 1, sinon l'ami n°5 tomberait dans un fossé à son 2ème pas.

1	-1	-1	+1	-1	+1	.	-1	.	+1	.	-1

Le 7ème terme est forcément +1, sinon l'ami n°1 tomberait dans un fossé au 8ème pas.

1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	.	+1	.	-1

Le 9ème terme ne peut être 1, car l'ami n°1 tomberait dans un fossé au 10ème pas.
Le 9ème terme ne peut être -1 car l'ami n°3 tomberait dans un fossé au 12ème pas.

Conclusion : Aucune suite unitaire de longueur 12 est sécurisée.

Partie D :

Pour aller jusqu'au 58ème pas :
L'ami n°1 doit lire jusqu'au 58 ème terme de la suite.
L'ami n°3 doit lire jusqu'au 3x58= 174ème terme de la suite, mais en ne tenant compte que d'un terme sur 3.
L'ami n°5 doit lire jusqu'au 5x58=290ème terme de la suite, mais en ne tenant compte que d'un terme sur 5.
L'ami n°7 doit lire jusqu'au 7x58=406ème terme de la suite, mais en ne tenant compte que d'un terme sur 7.
Pour le reste de la promenade, il reste à l'ami n°7, 594 termes de la suite à lire, ce qui représente 84 pas à faire, il reste à l'ami n°5, 710 termes à lire ce qui représente 142 pas à faire, il reste à l'ami n°3 826 termes à lire ce qui représente 275 pas à faire, il reste à l'ami n°1, 942 termes de la suite à lire ce qui représente 942 pas.
D'autre part , le nombre de façons de répartir les 3 amis sur les 5 lignes est 5x5x5=125 façons.
Pour être sûr qu'apparaissent au moins deux fois la même répartition pendant le reste de la promenade, il faut alors que les 3 promeneurs fassent en commun au moins 126 pas.
Cela exclut l'ami n°7 qui n'a plus que 84 pas à faire.

Les 3 amis sont donc forcément les numéros 1, 3 et 5. Dans ce cas ils ont en commun à faire encore 142 pas.
Comme il y a 125 répartitions différentes des 3 amis sur les 5 lignes, il y en a au moins une qui apparaîtra au moins deux fois. Paul a donc raison.

Proposition :

Sujet pour S : parties A, B, C, D
Sujets pour autres séries que S : parties A, B, C