Mathématiques - brevet de technicien supérieur
session 2009 - groupement A
Éléments de correction

Exercice 1 :

Spécialités Électrotechnique, Génie optique, IRIST et TPIL

Partie A :

1. Comme $\tau = 0,01$ alors $\lambda = 5$.
   (a) On demande

$$\begin{aligned} p(X \leqslant 1) &= p(X = 0) + p(X = 1) \\ &\approx 0,041 \end{aligned}$$

   (b) On demande

$$\begin{aligned} p(X > n_0) &= p\left(\overline{X \leqslant n_0}\right) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n_0} p(X = k) \end{aligned}$$

   d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0} p(X = k) \geqslant 0,95$.
   Par conséquent, afin de déterminer le plus petit entier n_0 à l'aide la table de la loi de Poisson, il faut ajouter successivement les valeurs de façon à dépasser $0,95$. On obtient

$$p(X \leqslant 9) \approx 0,968$$

   alors $n_0 = 9$.
2. La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $\mu = 100$ et d'écart type $\sigma = 10$ alors la variable aléatoire $T = \dfrac{X - 100}{10}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
   (a) On a donc :

$$\begin{aligned} p(X > 120) &= p\left(T > \frac{120 - 100}{10}\right) \\ &= p(T > 2) \\ &= p(\overline{T \leqslant 2}) \\ &= 1 - p(T \leqslant 2) \\ &= 1 - \Pi(2) \\ &\approx 0,023 \end{aligned}$$

   (b) On a

$$\begin{aligned} p(100 - a \leqslant X \leqslant 100 + a) &= p\left(\frac{100 - a - 100}{10} \leqslant T \leqslant \frac{100 + a - 100}{10}\right) \\ &= p(-0.1a \leqslant T \leqslant 0,1a) \\ &= \Pi(0,1a) - \Pi(-0,1a) \\ &= \Pi(0,1a) - [1 - \Pi(0,1a)] \\ &= 2\Pi(0,1a) - 1 \end{aligned}$$

Il faut alors résoudre

$$\begin{aligned} 2\Pi(0,1a) - 1 &= 0,99 \\ \Pi(0,1a) &= 0,995 \\ 0,1a &\approx 2,575 \\ a &\approx 25,75 \end{aligned}$$

Partie B :

1. (a) Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,01$.

   (b) On demande

$$\begin{aligned} p(Y \leqslant 2) &= p(Y = 0) + p(Y = 1) + p(Y = 2) \\ &= \mathrm{C}_{30}^{0}\, 0,01^0 \times 0,99^{10} + \mathrm{C}_{30}^{1}\, 0,01^1 \times 0,99^9 + \mathrm{C}_{10}^{2}\, 0,01^2 \times 0,99^8 \\ &\approx 0,997 \end{aligned}$$

2. (a) Z suit la loi binomiale de paramètres $n = 365$ et $p = 0,01$.

   (b) On a l'espérance mathématique $E(Z) = np = 3,65$ et l'écart-type $\sigma(Z) = \sqrt{np(1-p)} \approx 1,9$

Partie C :

1. (a) On a

$$\begin{aligned} P(T \leqslant t) &= \int_0^t 500\mathrm{e}^{-500t}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-500t}\right]_0^t \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-500t} \end{aligned}$$

   (b) Il faut résoudre

$$\begin{aligned} p(T \leqslant t) &= 0,95 \\ 1 - \mathrm{e}^{-500t} &= 0,95 \\ \mathrm{e}^{-500t} &= 0,05 \\ t &= -\frac{\ln 0,05}{500} \\ t &\approx 0,006 \end{aligned}$$

2. (a) On pose $\begin{cases} u(x) &= x \\ v'(x) &= 500\mathrm{e}^{-500x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v(x) &= -\mathrm{e}^{-500x} \end{cases}$ d'où, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^t 500x\mathrm{e}^{-500x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-x\mathrm{e}^{-500x}\right]_0^t - \int_0^t (-\mathrm{e}^{-500x})\,\mathrm{d}x \\ &= -t\mathrm{e}^{-500t} + \int_0^t \mathrm{e}^{-500x}\,\mathrm{d}x \\ &= -t\mathrm{e}^{-500t} + \left[-\frac{\mathrm{e}^{-500x}}{500}\right]_0^t \\ &= \frac{1}{500} - \frac{1}{500}\mathrm{e}^{-500t} - t\mathrm{e}^{-500t} \end{aligned}$$

(b) On a $\begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} (-500t) & = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X & = 0 \end{cases}$ alors, par composée,

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-500t} = 0.$$

Il faut écrire

$$t\mathrm{e}^{-500t} = \frac{1}{500} \frac{500t}{\mathrm{e}^{500t}}$$

et

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} (500t) & = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} & = 0 \end{cases}$$

alors par composée,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{500t}}{500t} = +\infty$$

d'où par l'inverse,

$$\lim_{t \to +\infty} t\mathrm{e}^{-500t} = 0$$

Par somme, on obtient

$$\lim_{t \to +\infty} I(t) = \frac{1}{500}.$$

Exercice 1 :

Spécialités CIRA et Systèmes électroniques

1. On effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{cases} u(t) &= t \\ v'(t) &= \cos(n\pi t) \end{cases} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} u'(t) &= 1 \\ v(t) &= \dfrac{\sin(n\pi t)}{n\pi} \end{cases}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t &= \left[t \times \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sin(n\pi)}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\left[\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 \quad \text{avec } \sin(n\pi) = 0 \\ &= \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2}\end{aligned}$$

2. (a) Voir le document réponse.

   (b) On a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

On a $\omega = \dfrac{2\,\pi}{T}$ avec $T = 2$ d'où $\omega = \pi$.
À l'aide du formulaire, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 f(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2} \quad \text{d'après la question précédente}\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t)\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 f(t)\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} \quad \text{d'après la question précédente}\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression de $S_f(t)$, on obtient

$$S_f(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi t) - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} \sin(n\pi t) \right].$$

(c) On a

$$\begin{aligned}
\mu_{eff}^2 &= \frac{1}{2} \int_0^2 [f(t)]^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 [f(t)]^2 \,\mathrm{d}t + \int_1^2 [f(t)]^2 \,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 [f(t)]^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

(d) On a $\cos(n\pi) = (-1)^n$, alors on obtient le tableau suivant :

n	1	2	3
a_n	$-\frac{2}{\pi^2}$	0	$-\frac{2}{9\pi^2}$
b_n	$\frac{1}{\pi}$	$-\frac{1}{2\pi}$	$\frac{1}{3\pi}$

(e) À l'aide des valeurs précédentes, on obtient

$$\begin{aligned}
A &= \frac{81\pi^4 + 882\pi^2 + 2624}{216\pi^4} \\
&\approx 0,913
\end{aligned}$$

3. En utilisant $\cos(-X) = \cos X$ et $\sin(-X) = -X$, on obtient immédiatement le résultat demandé

$$S_g(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi t) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} \sin(n\pi t) \right].$$

4. (a) Voir le document réponse.

(b) On a

$$\begin{aligned}
S_h(t) &= S_f(t) + S_g(t) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi t)
\end{aligned}$$

d'où les coefficients de Fourier associés à la fonction h

$$\begin{cases}
a_0 &= \frac{1}{2} \\
a_n &= 2\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2} \\
b_n &= 0
\end{cases}$$

De même,

$$\begin{aligned} S_k(t) &= S_f(t) - S_g(t) \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} 2\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(n\pi t) \end{aligned}$$

d'où les coefficients de Fourier associés à la fonction k

$$\begin{cases} a_0 &= 0 \\ a_n &= 0 \\ b_n &= -2\dfrac{\cos(n\pi)}{n\pi} \end{cases}$$

Exercice 2 :

Toutes spécialités

Partie A :

1. On a

$$\mathscr{L}\left[s_1(t)\right] = S_1(p) \quad \text{et} \quad \mathscr{L}\left[\int_0^t s_1(u)\,\mathrm{d}u\right] = \frac{S_1(p)}{p}$$

et

$$\mathscr{L}\left[U(t)\right] = \frac{1}{p}$$

d'où en remplaçant dans l'équation donnée,

$$\begin{aligned} S_1(p) + \frac{S_1(p)}{p} &= \frac{1}{p} \\ \left(1 + \frac{1}{p}\right) S_1(p) &= \frac{1}{p} \\ S_1(p) &= \frac{1}{p+1} \end{aligned}$$

2. Par lecture de la table de la transformée de Laplace, on obtient

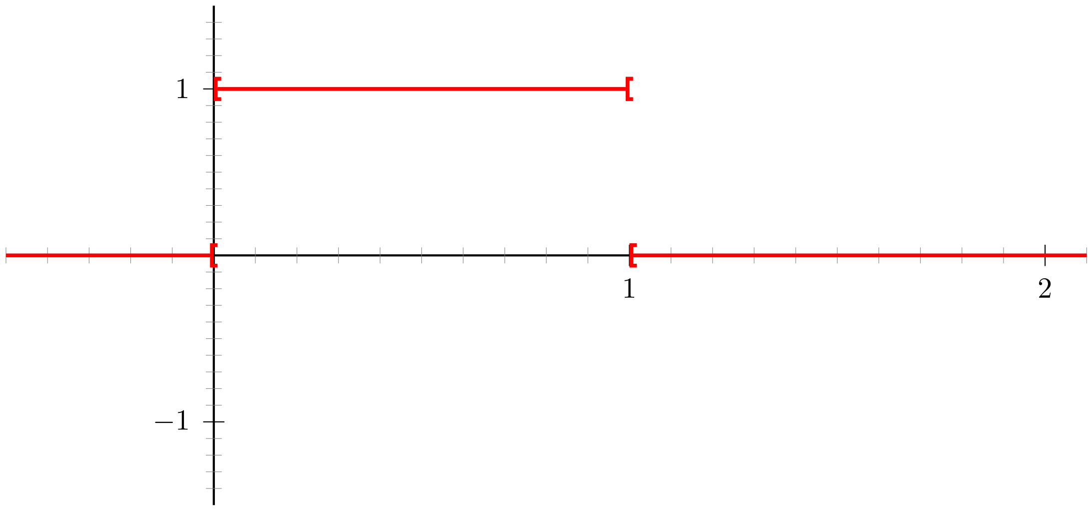
$$s_1(t) = \mathrm{e}^{-t}U(t)$$

Partie B :

1. On a $e_2(t) = U(t) - U(t-1)$, c'est à dire

$$\begin{cases} e_2(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ e_2(t) = 1 & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ e_2(t) = 0 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

Représentation graphique de la fonction e_2 :



2. On a

$$\mathscr{L}\left[U(t-1)\right] = \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-p}$$

d'où

$$E_2(p) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-p}}{p}$$

Comme à la question précédente, on obtient alors

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{p}\right)S_2(p) &= \frac{1-\mathrm{e}^{-p}}{p}\\ S_2(p) &= \frac{1-\mathrm{e}^{-p}}{p+1}\\ S_2(p) &= \frac{1}{p+1}-\frac{\mathrm{e}^{-p}}{p+1}\end{aligned}$$

3. (a) Par lecture de la table de la transformée de Laplace, on obtient

$$s_2(t)=\mathrm{e}^{-t}U(t)-\mathrm{e}^{-(t-1)}U(t-1)$$

   (b) À l'aide de la relation précédente, on obtient :
   - Pour $t<0$, $s_2(t)=0$;
   - pour $0\leqslant t<1$, $s_2(t)=\mathrm{e}^{-t}$;
   - pour $1\leqslant t$,

$$\begin{aligned}s_2(t) &= \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-(t-1)}\\ &= \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-t+1}\\ &= \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{1}\\ &= -\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}-1)\end{aligned}$$

4. Sur $[1\,;+\infty[$, on a $s_2(t)=-\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}-1)$. Cette fonction est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et

$$\left(\mathrm{e}^{-t}\right)'=-\mathrm{e}^{-t}$$

d'où

$$s_2'(t)=\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}-1)$$

Or, pour tout réel t, $\mathrm{e}^{-t}>0$ et $(e-1)>0$, alors $s_2'(t)>0$.
La fonction s_2 est strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$.

5. On a

$$\begin{aligned}s_2(1^+) &= -\mathrm{e}^{-1}(e-1)\\ &= -1+\mathrm{e}^{-1}\end{aligned}$$

De même,

$$s_2(1^-)=\mathrm{e}^{-1}$$

d'où

$$s_2(1^+)-s_2(1^-)=-1$$

6. (a) On obtient le tableau suivant :

t	1	$1,1$	$1,5$	2	$2,5$
$s_2(t)$	$-0,63$	$-0,57$	$-0,38$	$-0,23$	$-0,14$

   (b) Tracé : voir le document réponse.

Partie C :

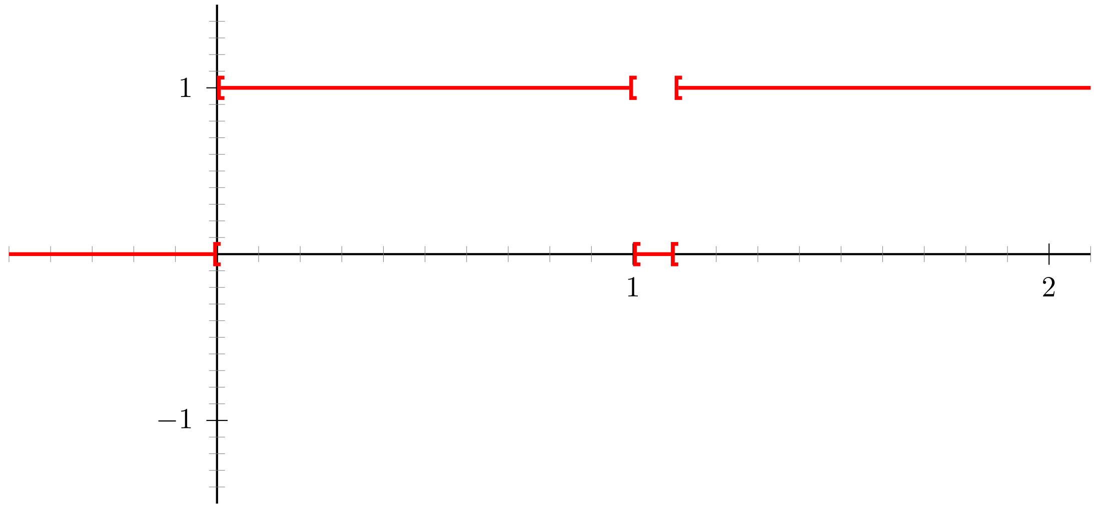
1. (a) Pour $t<1,1$, $U(t-1,1)=0$ alors,

$$\text{pour } t<1,1,\ e_3(t)=e_2(t)$$

   (b) Pour $t\geqslant 1,1$, $U(t-1,1)=1$, alors

$$\text{pour } t\geqslant 1,1,\ e_3(t)=1$$

(c) La représentation graphique de la fonction e_3 est la suivante :



2. On a $\left(\mathrm{e}^{-t}\right)' = -\mathrm{e}^{-t}$ alors, pour $t > 1,1$,

$$s_3'(t) = -\mathrm{e}^{-t}\left(1 - \mathrm{e} + \mathrm{e}^{1,1}\right)$$

Or $-\mathrm{e}^{-t} < 0$ et $1 - \mathrm{e} + \mathrm{e}^{1,1} > 0$, alors $s_3'(t) < 0$.
La fonction s_3 est strictement décroissante sur $]1,1\,;\,+\infty[$.

3. On a

$$\begin{aligned} s_3(1,1^+) &= \mathrm{e}^{-1,1}(1 - \mathrm{e} + \mathrm{e}^{1,1}) \\ &= 1 + \mathrm{e}^{-1,1} - \mathrm{e}^{-0,1} \end{aligned}$$

De même,

$$s_3(1,1^-) = -\mathrm{e}^{-0,1} + \mathrm{e}^{-1,1}$$

d'où

$$s_3(1,1^+) - s_3(1,1^-) = 1$$

4. (a) On obtient le tableau suivant :

t	$1,1$	$1,5$	2	$2,5$
$s_3(t)$	$0,43$	$0,29$	$0,17$	$0,11$

(b) Tracé : voir le document réponse.

Document réponse de l'exercice 1, spécialités CIRA et Systèmes électroniques

FIG. 1 – Représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f

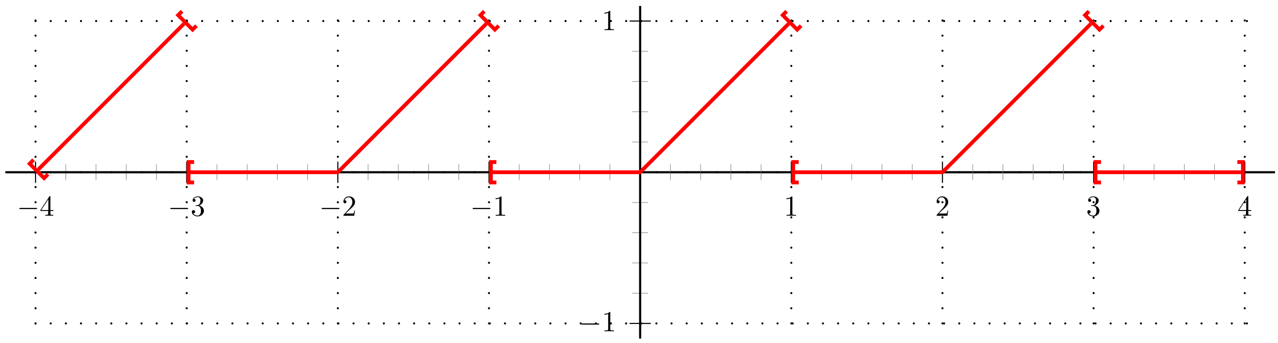


FIG. 2 – Représentation graphique $\mathscr{C}_g$ de la fonction g

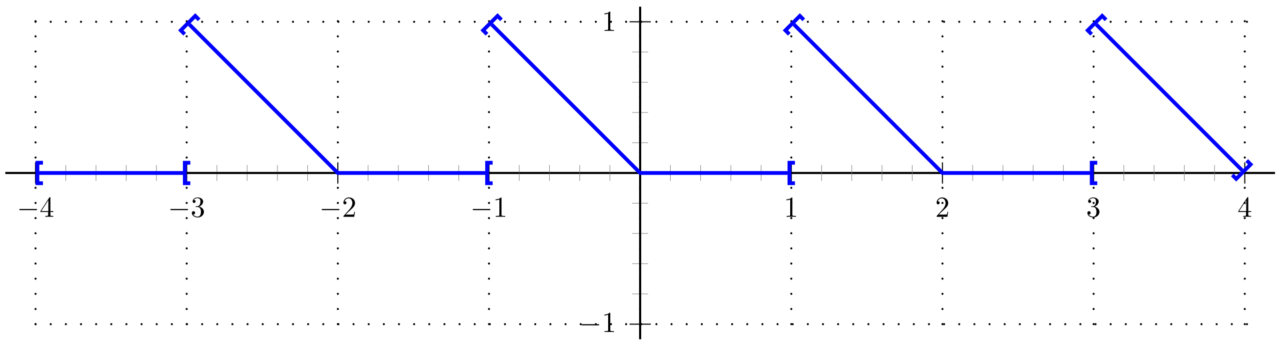


FIG. 3 – Représentation graphique $\mathscr{C}_h$ de la fonction h

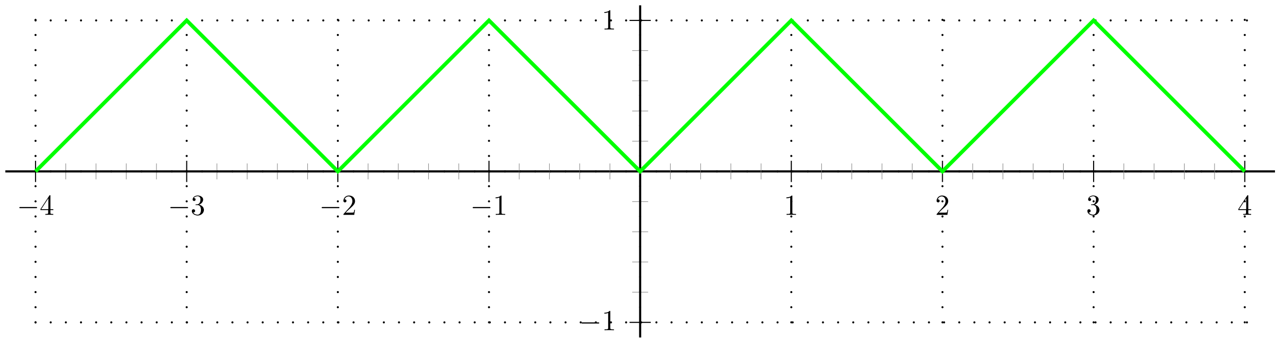
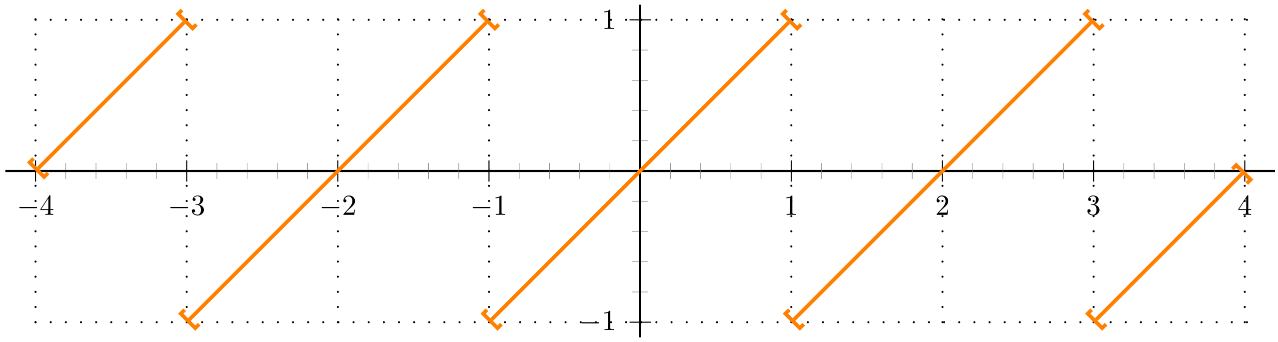


FIG. 4 – Représentation graphique $\mathscr{C}_k$ de la fonction k



Document réponse de l'exercice 2, toutes spécialités

FIG. 1 – Représentation graphique de la fonction s_1

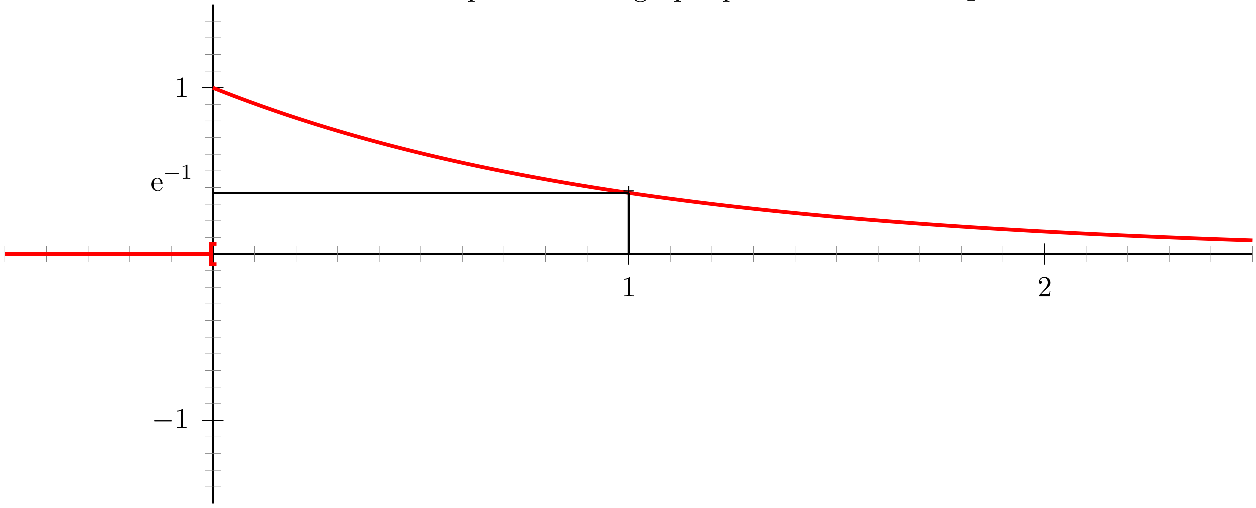


FIG. 2 – Représentation graphique de la fonction s_2

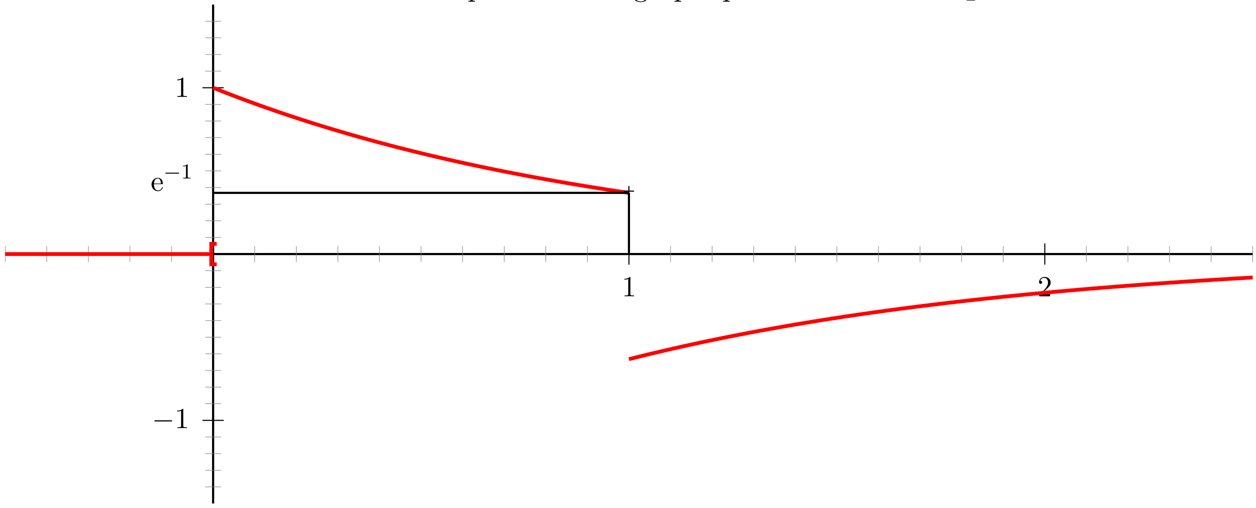
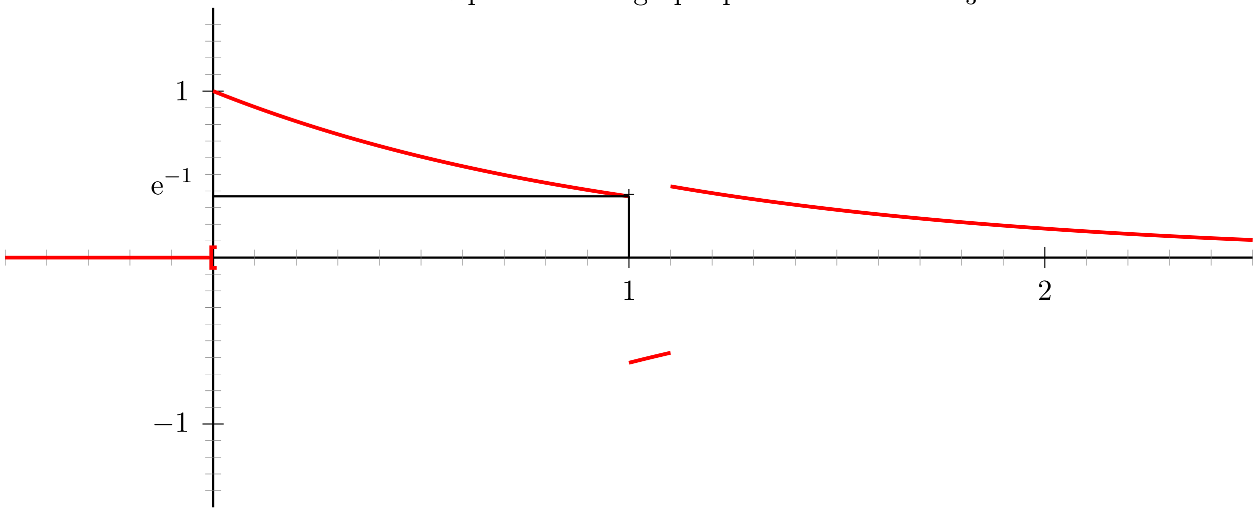


FIG. 3 – Représentation graphique de la fonction s_3



Suggestions ou remarques : xavier.tisserand@ac-poitiers.fr