Deux suites classiques !! - publié le 18/05/2014

Sujet n°17 (moyen)

• Énoncé

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par u_0 et v_0 réels strictement positifs donnés et :

$$u_{n+1}=u_n+\frac{1}{v_n} \text{ et } v_{n+1}=v_n+\frac{1}{u_n}.$$

Montrer que $u_{18}+v_{18}>12$

Réponse : Je commence par conjecturer que:

Pour tout $n\geqslant 1$, on a l'inégalité $u_n+v_n\geqslant 2\times a_n$

où (a_n) est la suite définie par $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ et $a_0=1$.

Si on prouve cette conjecture alors on aura en particulier (n=18):

$u_{18}+v_{18}\geqslant 2\times a_{18}\approx 2\times 6{,}26$. donc $u_{18}+v_{18}>12$

En effet, on peut facilement étudier la suite (a_n) :
Tous les termes sont strictement positifs.(récurrence immédiate)
Elle est strictement croissante ($car\ a_{n+1}-a_n>0$)

Elle est divergente vers $+\infty$ (sinon la limite L vérifierait $L=L+\frac{1}{L}$).

On peut calculer aisément les premiers termes de cette suite au tableur par exemple:

C2 | =B2+1/B2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	a_n	1	2	2,5	2,9	3,24	3,55	3,83	4,1	4,34	4,57	4,79	5	5,2	5,39	5,58	5,75	5,93	6,1	6,26	6,42	6,58
3																						

Cette suite a un deuxième intêret : elle est en quelque sorte"minimale".
Plus précisemment, nous allons montrer que:

Si (a'_n) est une autre suite définie par la relation $a'_{n+1}=a'_n+\frac{1}{a'_n}$ mais avec $a'_0>0$ quelconque différent de 1, alors $2\leqslant a_n<a'_n$ pour tout $n\geqslant 1$:

Preuve par récurrence:

Lemme: La fonction f définie pour x>0 par $f(x)=x+\frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;1]$ puis croissante sur $[1;+\infty[$. Son minimum est 2 atteint pour $x=1$.

Initialisation :

D'après le lemme: $a'_1 = a'_0 + \frac{1}{a'_0} > 2 = a_1$ donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité:

Supposons $2 \leq a_n < a'_n$ pour un certain rang $n \geqslant 1$ alors comme f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ on a $f(2) \leqslant f(a_n) < f(a'_n)$ donc $2 \leqslant 2{,}5 \leqslant a_{n+1} \leqslant a'_{n+1}$ donc la propriété est aussi vraie au rang $n+1$.

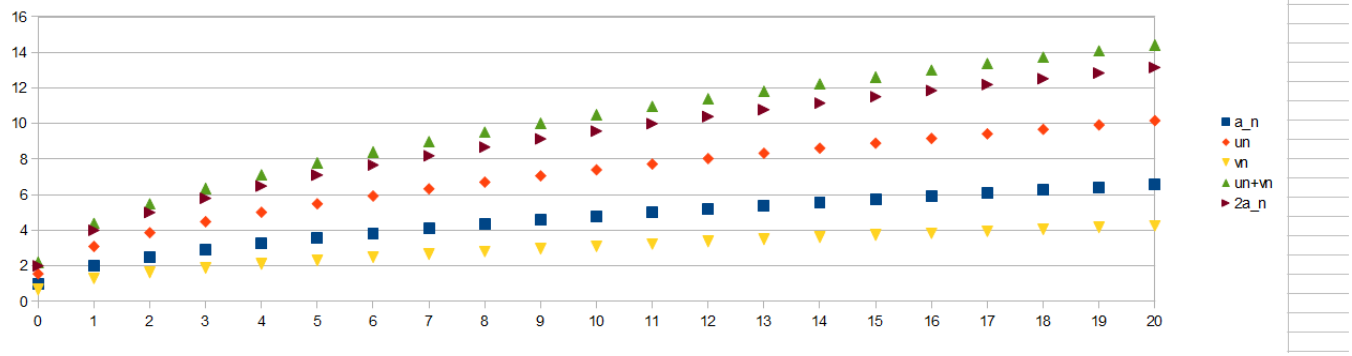
Conclusion:

On peut donc bien dire que la suite (a_n) est la plus petite de "la famille" (des suites récurrentes définie à l'aide de la fonction f)

Reste à prouver la conjecture:

Je n' arrive finalement pas à formaliser une preuve rigoureuse....(manque un peu de temps et d'idées)

Mais toutes mes simulations au tableur le confirment. (en choisissant au hasard u_0 et v_0 entre 0 et 2, et à coups de CTRL+MAJ+F9, une bonne centaine de fois)

B3 =2*ALEA()

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	a_n	1	2	2,5	2,9	3,24	3,55	3,83	4,1	4,34	4,57	4,79	5	5,2	5,39	5,58	5,75	5,93	6,1	6,26	6,42	6,58
3	un	1,55	3,09	3,86	4,48	5,01	5,49	5,93	6,33	6,71	7,06	7,4	7,72	8,03	8,33	8,62	8,89	9,16	9,42	9,68	9,92	10,16
4	vn	0,65	1,29	1,62	1,88	2,1	2,3	2,48	2,65	2,81	2,96	3,1	3,23	3,36	3,49	3,61	3,72	3,84	3,95	4,05	4,15	4,26
5	un+vn	2,2	4,39	5,48	6,36	7,11	7,79	8,41	8,98	9,51	10,02	10,5	10,96	11,4	11,82	12,22	12,62	13	13,37	**13,73**	14,08	14,42
6	2a_n	2	4	5	5,8	6,49	7,11	7,67	8,19	8,68	9,14	9,58	10	10,4	10,78	11,15	11,51	11,86	12,19	**12,52**	12,84	13,15