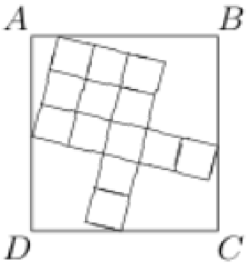
Treize carrés dans un rectangle. - publié le 05/03/2014

Sujet n° 13 (facile)

• Énoncé

On considère 13 carrés inscrits dans un rectangle ABCD avec AB=32 et BC=36. Calculer l'aire d'un carré.

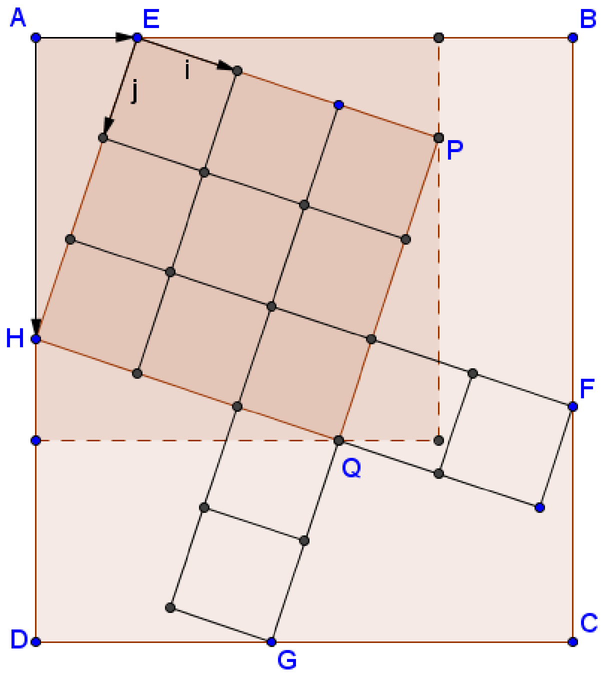


Réponse : l'aire d'un carré vaut 40 unités d'aire.

Avec les notations ci contre, dans le repère $\left(A, \frac{\vec{AE}}{AE}, \frac{\vec{AH}}{AH}\right)$ où $E(a,0)$ et $H(0,b)$, je fais apparaitre le carré de côté a+b (en pointillé) ce qui me donne $P(a+b,a)$ et $Q(b,a+b)$.
Je peux alors en déduire les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ qui définissent le carré qui nous intéresse:

$\vec{i} = \frac{\vec{EP}}{3}$ donc de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{b}{3} \\ \frac{a}{3} \end{pmatrix}$

$\vec{j} = \frac{\vec{EH}}{3}$ donc de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{-a}{3} \\ \frac{b}{3} \end{pmatrix}$



On peut ensuite en déduire les coordonnées de F et de G en fonction des paramètres a et de b:

$\vec{PF} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ donc $F\left(\frac{a}{3} + 5\frac{b}{3} ; 5\frac{a}{3} + 2\frac{b}{3}\right)$ d'où une première équation $\frac{a}{3} + 5\frac{b}{3} = 32$

$\vec{QG} = 2\vec{j}$ donc $G\left(b - 2\frac{a}{3} ; a + 5\frac{b}{3}\right)$ d'où une deuxième équation $a + 5\frac{b}{3} = 36$

Ce système donne un unique couple solution $a = 6\ et\ b = 18$

Finalement l'aire du petit carré est $\left(\frac{EH}{3}\right)^2 = \frac{(6^2 + 18^2)}{9} = 40$