Et si la calculatrice ne servait à rien ? - publié le 16/05/2013

Sujet n°16 (facile)

• Enoncé

Comparer les nombres suivants sans utiliser la calculatrice :

2012^{2012} et 2013^{2011}

Réponse: $2012^{2012} > 2013^{2011}$

On va démontrer l'inégalité équivalente $2012\ln(2012) > 2011\ln(2013)$, c'est à dire $F(2012)<0$ en ayant posé $F(x)=(x-1)\ln(x+1)-x\ln(x)$.

La fonction F est définie (et dérivable) sur $]0;+\infty[$, et F(1)=0:
Ainsi, il nous suffit de démontrer que F est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

Voyons sa fonction dérivée:

$$F'(x)=\ln(x-1)+(x-1)\times\frac{1}{(x+1)}-\ln(x)-x\times\frac{1}{x} = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+\frac{x-1-(x+1)}{(x+1)} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x+1}$$

On se doute bien que F'(x) est négatif lorsque x>1 mais ce n'est pas évident, d'ailleurs $\lim\limits_{x\to+\infty} F'(x) = 0$
Voyons la dérivée seconde:

$$F''(x)=\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{2}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)}+\frac{2}{(x+1)^2} = \frac{-(x+1)+2x}{x(x+1)^2} = \frac{x-1}{x(x+1)^2}$$

On peut alors affirmer que $F''(x)>0$ dès que x>1, donc F' est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} F'(x) = 0$, on en déduit *que* $F'(x)<0$ pour tout x>1.
Cela prouve que F est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$, et donc $F(2012)<F(1)=0$.

On a donc prouvé que $2012\ln(2012)>2011\ln(2013)$ c'est à dire $2012^{2012}>2013^{2011}$

<u>Remarques</u>
Avec la calculatrice, on peut toujours vérifier que $2012\ln(2012)\approx 15305$ alors que $2011\ln(2013)\approx 15298$

Impossible, en revanche, de vérifier l'inégalité de départ directement....
les nombres ont plus de six mille chiffres, (d'ailleurs combien exactement?)
l'un est environ 750 fois plus grand que l'autre (combien exactement?)

L'un est pair: quel est son dernier chiffre?
L'autre est impair: quel est son dernier chiffre?

Il y a donc encore moyen de s'amuser sans la calculatrice....