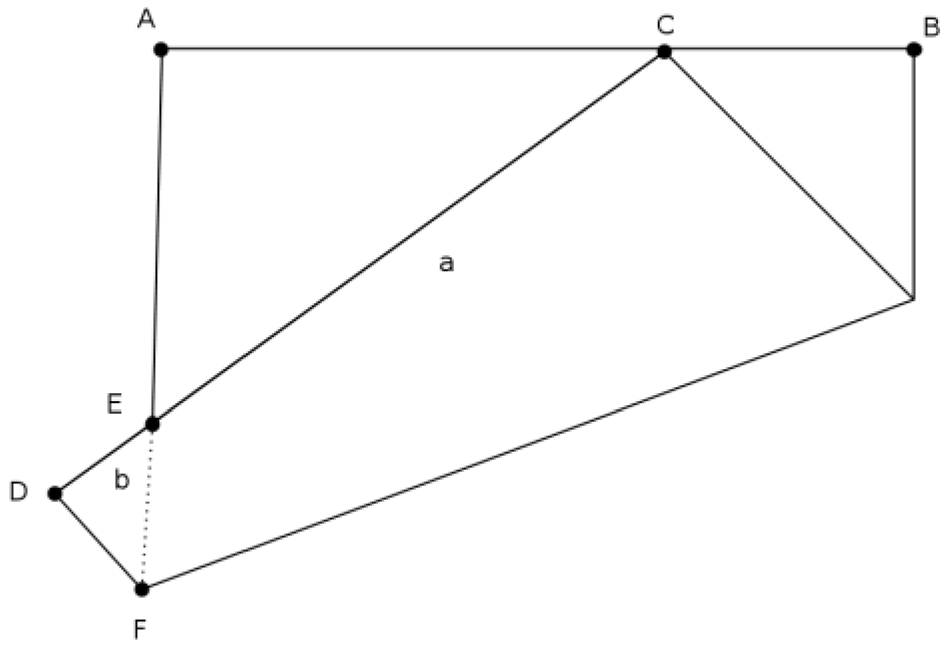
Enigme de la quinzaine n°15

Un pliage étonnant d'un carré ! - publié le 18/05/2015

Sujet n°15 (moyen)

- **Énoncé**

On considère un carré $ABCD$, qu'on plie de telle sorte que le point C se trouve sur le segment $[AB]$, comme le montre la figure ci-dessous. Peut-on évaluer la valeur minimale de $\frac{a}{b}$, avec $CE=a$ et $ED=b$?



Réponse: Oui, on peut l'estimer de manière exacte: $2+2\sqrt{2}$

On peut supposer que $AB=1$, posons alors $BC=x$.

Il est clair que le rapport $\frac{a}{b}$ peut s'exprimer de manière continue en fonction de $x\in]0;1[$.

Or, si $x=0$ alors le pliage donne $b=0$ donc le rapport vaudrait $+\infty$.

De même si $x=1$ le pliage donne $b=0$ donc le rapport vaudrait $+\infty$.

On est donc en mesure d'affimer qu'il existe une valeur minimale pour ce rapport.

Il nous reste juste à le calculer.

Appelons G le point qui manque sur le schéma. (de sorte que BCG soit rectangle en B)

On a donc d'après le théorème de Pythagore : $BC^2+BG^2=CG^2$

De plus, par pliage $CG=1-BG$, donc $x^2+BG^2=(1-BG)^2$ d'où $BG=\frac{(1-x^2)}{2}$

De plus par similarité des triangles BCG et ACE(angles égaux) ,

on peut écrire $\frac{BG}{CG}=\frac{AC}{EC}$ donc a= $EC=\frac{AC\times CG}{BG} = (1-x)\frac{\left(1-\frac{(1-x^2)}{2}\right)}{\left(\frac{(1-x^2)}{2}\right)} =...= \frac{(1+x^2)}{(1+x)}$

(après simplification).

Puis $b=1-a = 1-\frac{(1+x^2)}{(1+x)}=x\frac{(1-x)}{(1+x)}$

Enfin $\frac{a}{b}=\frac{(1+x^2)}{(x(1-x))}$

Il nous suffit de chercher pour quelle valeur de x entre 0 et 1, la dérivée de cette fonction de x s'annule.

Le calcul de la dérivée donne $\frac{(x^2+2x-1)}{(x(1-x))^2}$ donc on doit résoudre l'équation $x^2+2x-1=0$

Il y a une seule racine dans l'intervalle $]0;1[$ et elle est égale à $\sqrt{2}-1$.

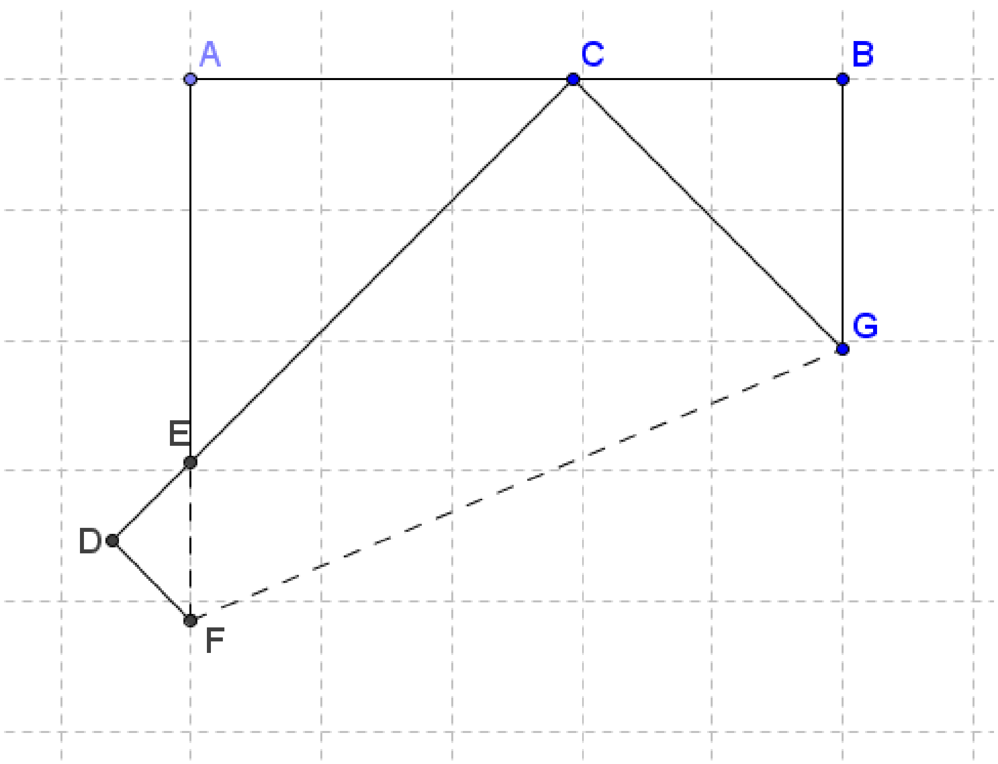
La valeur minimale du rapport $\frac{a}{b}$ est donc obtenue pour $x=\sqrt{2}-1$ et vaut bien après quelques simplifications $2+2\sqrt{2}$.

Remarque

Il est intéressant d'observer la forme particulière que l'on obtient...

En effet, si $x=\sqrt{2}-1$ *alors* $BG=\frac{(1-x^2)}{2} = ... = \sqrt{2}-1$ *aussi !*

Autrement dit le triangle BCG est rectangle isocèle, ce qui est donc également le cas du triangle ACE (et de EDF d'ailleurs).



On peut alors entreprendre assez facilement une construction à la régle et au compas en songeant qu'il existe sûrement une solution purement géométrique à ce problème....

Avec un post-it, on peut aussi faire la construction en pliant selon des angles de 45°.