

Enigme de la quinzaine n°14



Le Duc de Toscane : nouvelle version ! - publié le 03/05/2015 mis à jour le 04/05/2015
Sujet n°1 4 (moyen)

Ce problème est proposé par Jacques Marot.

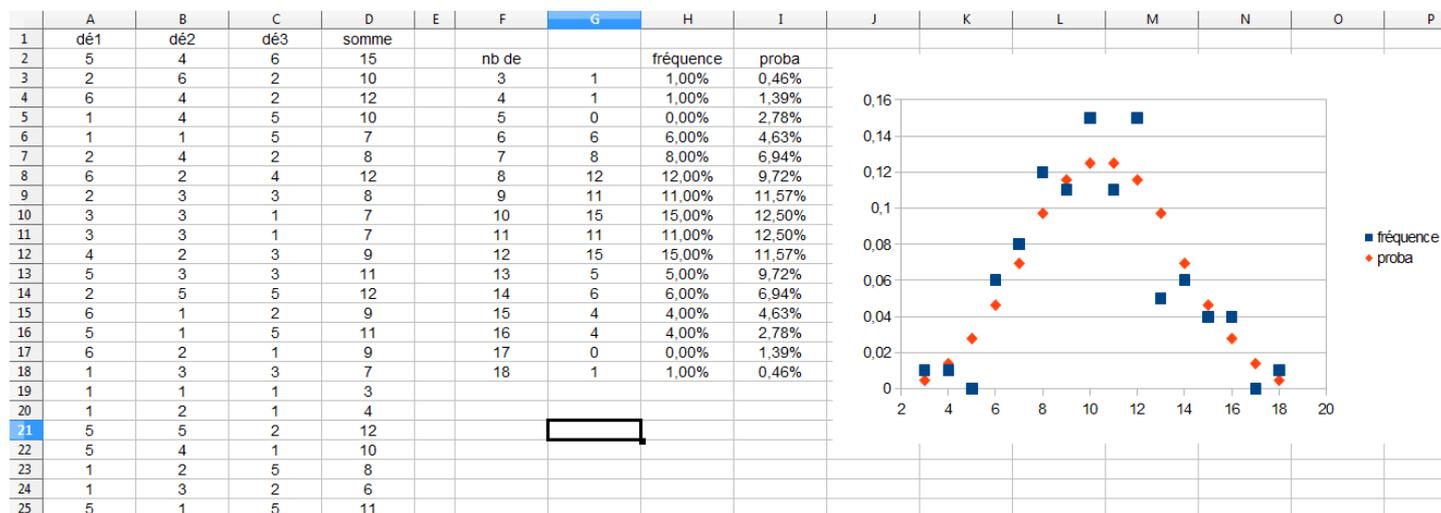
• Énoncé

Le Duc de Toscane avait repéré, dit la légende, que la probabilité d'obtenir la somme 10 avec 3 dés était supérieure à celle d'obtenir la somme 9. Pour déceler cette différence de l'ordre de 1%, on se dit qu'il devait passer beaucoup de temps à jouer. Mais en y regardant de plus près, lors de 100 parties quelle est la probabilité d'obtenir plus de 10 que de 9 ?

Réponse:

Je dirais qu'on peut estimer que la probabilité cherchée est environ égale à 53%. (à +/-1%)
Est ce cela qui a aidé le Duc de Toscane? J'en doute un peu...

J'ai commencé simplement par faire plusieurs simulations de 100 parties, au tableur.



On peut d'ailleurs en profiter pour observer la fluctuation d'échantillonnage, assez marquée d'un échantillon à l'autre ou par rapport aux probabilités théoriques obtenues par dénombrement des cas. On peut très bien faire ceci en seconde.

Ce que l'on veut observer dans cette énigme est un peu différent.

Il s'agit de connaître la probabilité **d'avoir strictement plus de 10 que de 9 sur 100 parties.** (c'est le cas dans ma capture d'écran ci dessus, mais pas à chaque fois).

Pour simplifier la situation, j'ai considéré qu'il y a 25 chances sur 216 d'obtenir 9 et 27 chances sur 216 d'obtenir 10. *Le reste n'est pas important.*

Donc je peux simuler la somme d'un lancer de 3 dés grâce à la fonction ALEA.ENTRE.BORNES(1;216), puis décider que j'obtiens 9 si le nombre obtenu est <26 et que j'obtiens un 10 si le nombre obtenu est >189. (avec la fonction NB.SI)

Ainsi je peux simuler la situation en une colonne puis en recopiant vers la droite, j'obtiens rapidement 400 simulations de 100 parties.

Il me reste à compter le nombre de fois où il y a plus de 10 que de 9.

(avec les fonction SI et SOMME)

Voici les quatre coins de mon fichier tableur...

A2										OK105										
=ALEA.ENTRE.BORNES(1,216)										=SOMME(A105:OJ105)/400										
A	B	C	D	E	F	G	H	I		OA	OB	OC	OD	OE	OF	OG	OH	OI	OJ	OK
Série 1	Série 2	Série 3	Série 4	Série 5	Série 6	Série 7	Série 8	Série 9		Série 3	Série 3	Série 3	Série 3	Série 3	Série 3	Série 3	Série 3	Série 3	Série 3	Série 400
86	35	132	196	113	30	107	85	91		163	167	145	110	116	201	200	102	30	74	
68	66	159	20	77	193	104	4	195		114	19	40	67	114	186	124	161	57	157	
202	41	103	175	130	16	67	60	167		99	43	127	132	42	7	5	117	143	119	
166	10	189	44	61	210	58	175	151		153	86	8	155	204	147	173	163	137	117	
72	31	94	173	126	22	36	147	80		207	127	167	111	3	136	135	84	52	112	
112	173	26	196	69	58	85	211	69		97	216	134	199	144	120	117	192	62	53	
110	143	113	151	135	116	156	197	51		7	73	117	97	25	152	107	9	166	9	
167	211	162	8	86	142	179	116	162		50	108	202	150	1	50	92	121	56	71	
35	136	186	38	183	57	63	29	45		185	53	23	153	151	204	12	173	1	33	
70	101	69	204	34	158	178	33	189		131	120	134	42	195	158	11	9	123	12	

A103										OK105											
=NB.SI(A1:A101;"<26")										=SOMME(A105:OJ105)/400											
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	OA	OB	OC	OD	OE	OF	OG	OH	OI	OJ	OK	
49	50	143	165	116	152	99	144	153	115	94	180	211	149	99	127	126	148	78	176	48	
138	142	79	143	198	156	59	77	112	90	95	127	175	72	53	138	48	43	108	177	131	
93	131	14	160	197	215	134	155	40	194	96	29	208	37	82	140	176	202	167	156	14	
27	211	24	55	3	204	22	59	155	145	97	207	105	39	14	86	65	15	67	180	97	
201	209	80	153	107	5	192	89	114	87	98	186	148	133	96	126	49	138	165	163	145	
20	200	97	30	7	183	213	210	73	101	99	36	27	83	91	212	53	120	51	123	95	
129	23	211	147	194	53	80	169	71	165	100	59	21	214	93	146	94	172	182	193	151	
101	83	135	104	17	167	119	29	34	25	101	57	124	102	60	32	158	216	209	148	38	
										102											
10	9	10	12	14	12	11	10	7	8	103	7	12	16	8	9	13	11	16	7	11	
12	14	10	8	18	20	15	11	17	13	104	11	13	11	11	12	11	12	9	14	8	
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	105	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	53,00%

Bilan : en 30 fois 400 simulations de 100 parties j'obtiens une proportion moyenne de **53,15%** (avec des variations entre 47,25% et 57,25% : marge d'erreur de 5% logique).

Je pense qu'il est inutile de refaire plus d'expériences, j'ai normalement une précision de l'ordre de 1%. Mais je le ferai peut-être faire à mes élèves de seconde par curiosité...

Pour le calcul théorique, j'ai l'impression que c'est bien compliqué sans une petite astuce que je ne vois pas. Sinon il va falloir manipuler des tas de lois binomiales...

Je me suis contenté de calculer une variante très simplifiée pour le principe et pour me donner bonne conscience:

A pile ou face: sur 100 parties quelle est la probabilité de faire strictement plus de Pile que de Face?

Il suffit de calculer la probabilité de faire exactement 50 fois Pile:

$$P = \binom{100}{50} \times \frac{1}{2^{100}} \approx 0,0796$$

On peut aussi s'amuser à donner une valeur plus pratique avec la formule de Stirling

$$P \approx \sqrt{\frac{1}{50\pi}} \approx 0,0798$$

Il y a donc $\frac{(1-0,796)}{2} = 46\%$ environ de faire plus de Pile que de Face en 100 parties.