Proposition d'une énigme pour une quinzaine à venir.

Dans l'épreuve de seconde du Rallye mathématique du Poitou Charentes,(Mardi 17 Mars 2015), l'exercice 7 (en langues étrangères) consistait, à partir d'une boite de 100 allumettes, à construire le plus grand carré possible (l'intérieur étant lui même rempli de carrés) ou bien le plus grand triangle équilatéral possible (l'intérieur étant lui même rempli de triangles équilatéraux), comme sur les figures 1 et 2.

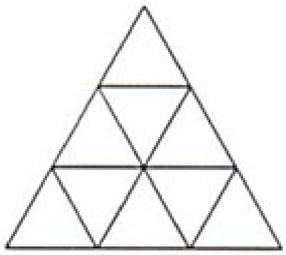

Figure 1

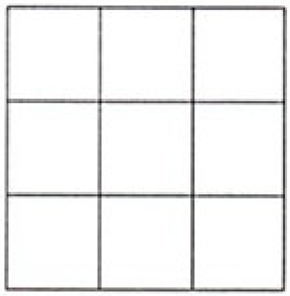

Figure 2

1) Quelle figure nécessite le plus d'allumettes?

2) Une telle coïncidence se reproduirait-elle avec :
   a) une boite de 10 000 allumettes?
   b) une boite de 1 000 000 allumettes?
   c) une boite avec autant d'allumettes qu'il est possible d'en trouver ?

Réponses:

1) On trouve après un peu d'observation qu'un triangle de coté t allumettes en nécessite $3\frac{t(t+1)}{2}$ alors qu'un carré de coté c allumettes en nécessite $2c(c+1)$.
Pour t=7 ou c=6, on obtient **84 allumettes dans les deux cas**.

2) La question posée revient à chercher l'existence d'autres couples de valeurs entières (t,c) tels que:
$$3\frac{t(t+1)}{2}=2c(c+1) .$$
a) Avec une boite de 10 000 allumettes, une recherche au tableur ou avec un algorithme montre qu'il n' y a **pas d'autres solutions que (t,c)=(7,6)**.

b) Avec 1 000 000 d'allumettes en revanche, c'est possible avec **(t,c)=(104,90)**
(Total de 16 380 allumettes. Pas d'autres possibilités....)

c) Avec un nombre plus grand d'allumettes *, on trouve seulement quelques autres possibilités :

(t,c)=(1455,1260), puis...**(20 272,17 556)** , **(282 359,244 530)**, (3 932 760,3 405 870), (54 776 287, 47 437 656) , (762 935 264,660 721 320), ...
les deux ou trois dernières demandant plus d'allumettes qu'il n'en ait jamais existé... (plus de 10^{12} **)*

Ainsi les possibilités n'existent pas à la "pelle"....on a la place de les écrire dans une marge :)
En effet, l'équation $\frac{3t(t+1)}{2}=2c(c+1)$ se ramène à une équation de Pell Fermat $x^2-3y^2=1$
(en posant $x=4c+2$ et $y=2t+1$)

Le couple de suites u et v définies par:
$u_0=2$ et $v_0=1$ puis $u_{n+1}=2u_n+3v_n$ et $v_{n+1}=u_n+2v_n$ donne une infinité de solutions à cette équation: en effet on montre facilement par récurence que $u_n^2-3v_n^2=1$ pour tout n.

Puis on en déduit les couples (t,c) donnés plus haut.

*: *on peut se limiter à* 10^{29} *allumettes, sachant que la masse de la Terre est inférieure à* 10^{28} *g et qu'une allumette pèse environ 0,1g.*
On peut même se limiter à la production mondiale d'allumettes depuis son invention: maximum 10^{12} *d'après mes recherches:*

- L'allumette moderne est inventée au début du 19ème siècle.
- La production mondiale a été au maximum de 80 milliards par an (en 1960 avant l'arrivée des briquets jetables) http://www.tourisme93.com/document.php?pagendx=84&engine_zoom=PcuIDFC930001356
- Donc 200 ans avec 100 milliards d'allumettes grand maximum par an, donne une majoration de 20 000 milliards $< 10^{12}$