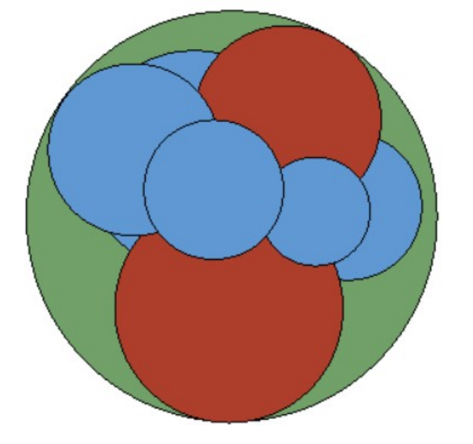
Enigme de la quinzaine n°10

Que de sphères, que de sphères !! - publié le 18/02/2015 mis à jour le 23/02/2015
Sujet n°10 (difficile)

- **Énoncé**

On considère une grande sphère verte contenant deux sphères "moyennes" de couleur marron, tangentes intérieurement à la grande sphère et tangentes entre elles.Un nombre de petites sphères bleues forme un collier autour de nos deux sphères moyennes. Elles sont tangentes à la grande sphère, tangentes entre elles et aux deux sphères moyennes. Combien peut-on placer de ces petites sphères dans notre collier ? Quelle relation a-t-on entre leurs rayons ?

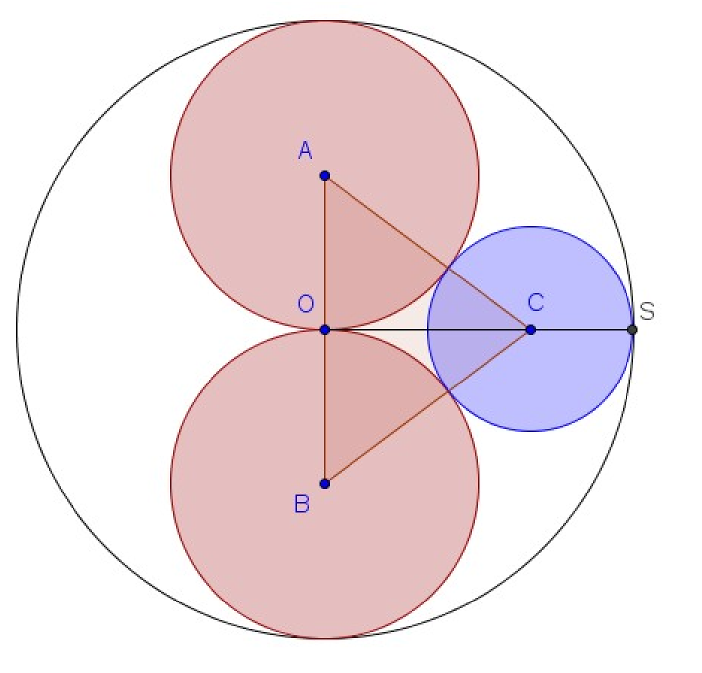


Réponse: On peut placer **six** petites sphères bleues dans le collier.
La somme des rayons des petites sphères bleues **semble égale** à la somme des diamètres des deux moyennes sphères marrons.

Pour le deviner, j'ai d'abord étudié la plus simple des situations: lorsque les deux sphères moyennes ont le même rayon, notons le R, ce sera notre unité. Alors:

1) La grande sphère a pour rayon $4R$, (par symétrie de la figure)
2) Les petites ont le même rayon , notons le r. (toujours par symétrie)
3) $r = 2R/3$ (par déduction sur la vue de profil : voir ci dessous)
4) on peut en loger six (par déduction sur la vue de dessus: voir ci dessous)

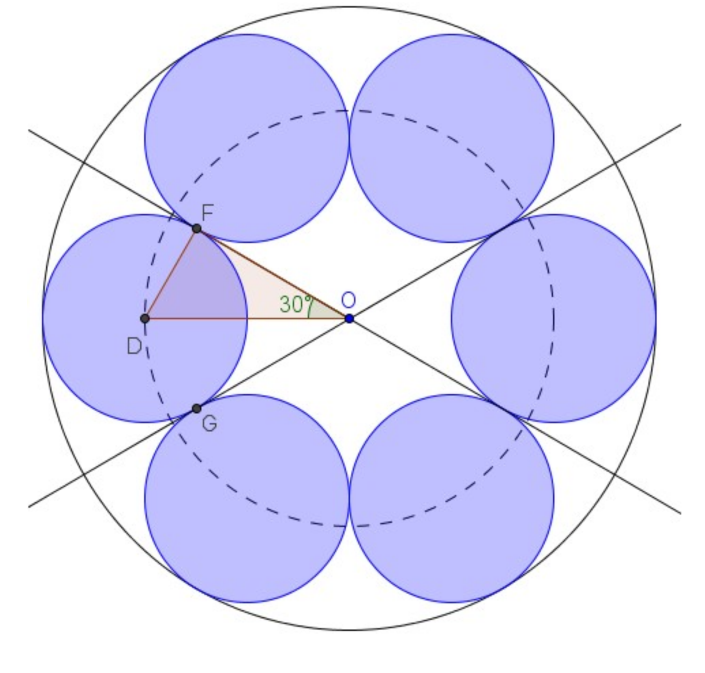
Vue de Profil



D'après les propriétés de géométrie du collège:
$OC = OS - CS = 2R - r$ d'une part
$OC^2 = AC^2 - AO^2 = (R+r)^2 - R^2 = 2Rr + r^2$ d'autre part
D'où $(2R-r)^2 = 2Rr + r^2$, on en déduit que
$4R^2 = 6Rr$ et donc $r = \frac{2R}{3}$

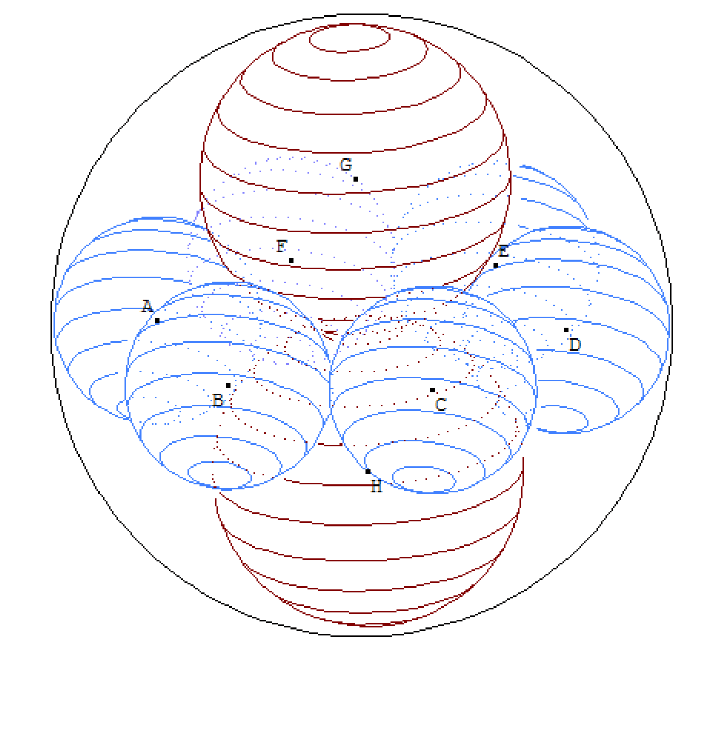
(Bon exercice pour les secondes...)

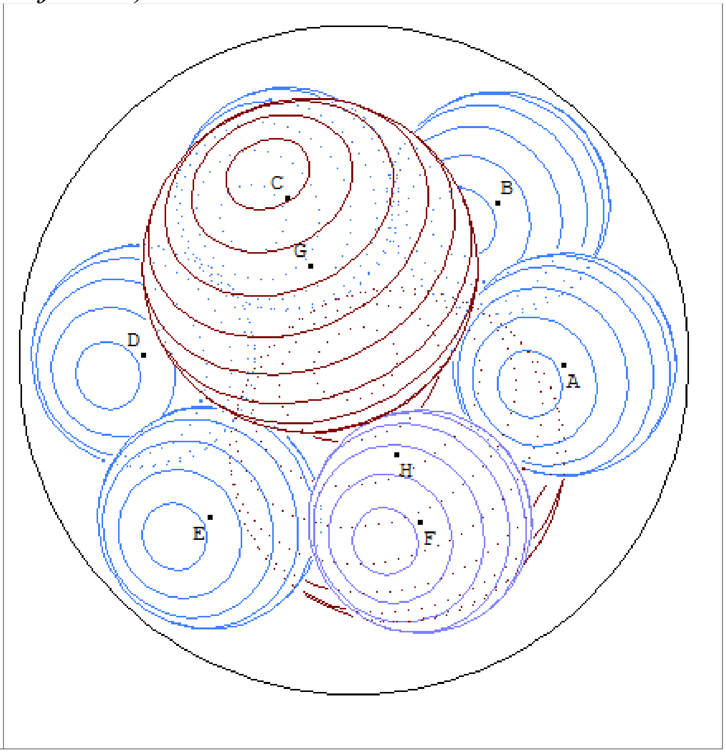
Vue de dessus (ou de dessous , c'est pareil)



Sachant que $r = \frac{2R}{3}$, on sait que les centres des sphères bleues sont sur le cercle en pointillés (rayon $2R - r = \frac{4R}{3}$ et centre 0).
Pour qu'elles soient tangentes entre elles, le triangle OFD doit être rectangle en F.
On en déduit que OFD est un demi triangle équilatéral OFG, on peut donc construire un hexagone régulier de centre O et de coté FG, qui permet d'obtenir exactement six sphères.

Avec Géospace, on a l'impression de voir en 3D (*et aussi de remonter le temps..., il doit exister des logiciels de géométrie plus jolis de nos jours!*) :





La question laissant entendre qu'il existe un nombre de sphères dans le collier, j'en déduis un peu abusivement que la réponse ne peut être que **six**.

Pour la relation générale entre les rayons, elle doit faire intervenir les six petits rayons $r_1, r_2, \ldots, r_6$ et les deux moyens R_1 *et* R_2 .

La relation " **somme des petits rayons = somme des moyens diamètres**", pourrait convenir.

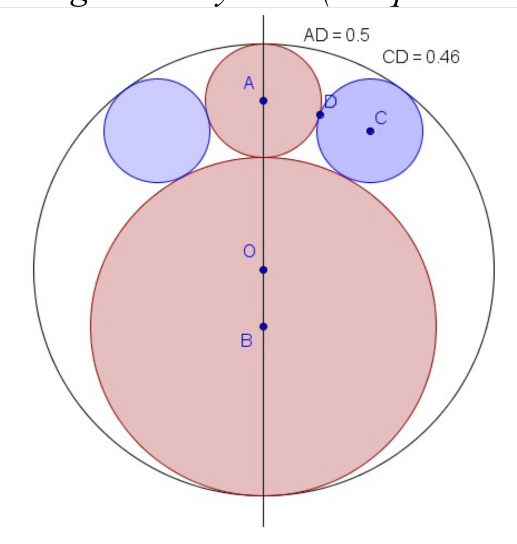
$$\sum_{i=1}^{6} r_i = 2(R_1 + R_2)$$

Ce serait un beau résultat, simple et digne d'un sangaku japonais.

Dans ma situation particulière, elle est bien valable. ($6 \times \frac{2R}{3} = 4\mathrm{R} = 2(R+R)$)

Remarque:

Si j'avais un peu plus de temps, j'étudierai d'autres situations simples pour confirmer, puis espérer trouver une démonstration génerale ou bien me rendre compte que je me suis trompé et que la démonstration générale fait appel à des outils plus sophisitiqués que de la géométrie de collège ou de lycée... (ce qui ne m'étonnerait qu'à moitié vu que l'énigme est classée "difficile")



La curiosité m'a poussé à tester la situation où $R_1 = 0{,}5$ et $R_2 = 1{,}5$: et tous les r_i égaux.

Une simple mesure avec géogébra ruine mes espoirs en me donnant $6 \times 0{,}46 < 2(0{,}5 + 1{,}5)$.

Je m'étais donc trompé sur la relation, mais je pense avoir raison sur les six sphères...