Enigme de la quinzaine n°9

Une valeur exacte, dites-vous ! - publié le 03/02/2015

Sujet n°9 (facile)

- **Énoncé**

Pouvez-vous donner la valeur exacte de

$$A = \sqrt[8]{14159 - \cfrac{1}{14159 - \cfrac{1}{14159 - \cdots}}} \ ?$$

Réponse:)

On pourrait penser au nombre π puisque il y a ***"trois 14159 et des petits points"*** dans la formule, mais il un peut tôt pour célébrer le π -day et ma calculatrice renvoie une valeur approchée proche de 3,302...

Regardons donc de plus près ce nombre A:

C'est une racine huitième donc un nombre positif et $A^8 = p - \cfrac{1}{p - \cfrac{1}{p - \ldots}}$ avec **p=14159**

1) Supposons tout d'abord que cette écriture définisse bien un nombre,

alors $p - A^8 = \cfrac{1}{p - \cfrac{1}{p - \ldots}}$ donc $p - A^8 = \frac{1}{A^8}$

donc A^8 serait solution de l'équation $p - X = \frac{1}{X}$ autrement dit $X^2 - pX + 1 = 0$

Or cette équation du second degré a deux solutions puisque $\Delta = p^2 - 4 > 0$, *étant donné que p=14159.*

Il en résulte que A^8 a deux valeurs possibles, toutes deux positives:

$$\frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2} \approx 0{,}000\,000\,7$$

On peut exclure la petite en remarquant l'encadrement $14158 < p - \frac{1}{p-1} < A^8 < p - \frac{1}{p}$

A^8 ne peut donc valoir que $\frac{14159 + \sqrt{14159^2 - 4}}{2} \approx 14158{,}99993$

la valeur exacte de A pourrait donc s'écrire $\sqrt[8]{\frac{14159 + \sqrt{14159^2 - 4}}{2}} \approx 3{,}302\ldots$

ou encore $\sqrt[8]{\frac{14159 + \sqrt{200477277}}{2}}$

Mais je crois que je préfère mon idée avec le nombre π qui, bien qu'inexacte est plus plaisante que cette formule peu élégante.

2) Il reste toutefois à montrer que cette formule définisse bien un nombre.

Pour $p>2$, on considère la suite définie par $x_0=p-1$ et $x_{n+1}=p-\frac{1}{x_n}$

alors on a construit une suite de termes positifs qui donne:

$$x_1=p-\frac{1}{p-1} \quad \text{puis} \quad x_2=p-\cfrac{1}{p-\cfrac{1}{p-1}} \quad \text{etc........}$$

et qui donnerait à la limite la valeur de $A^8=p-\cfrac{1}{p-\cfrac{1}{p-\dots}}$.

Pour démontrer que cette suite converge, il suffit de justifier que pour p>2, elle est **croissante et majorée**:

-La fonction de récurrence définie par $f(x)=p-\frac{1}{x}$ est croissante sur $]0;+\infty[$

donc la suite est monotone, il suffit de regarder les premiers termes:

$$x_1-x_0 = p-\frac{1}{p-1}-p-1=\frac{p(p-1)-1-(p-1)^2}{p-1}=\frac{p^2-p-1-p^2+2p-1}{p-1}=\frac{p-2}{p-1}$$

donc si p>2 **la suite est bien croissante**.

-La suite **est majorée par p** (*par récurrence immédiate*)

Ainsi, nous pouvons être certains qu'elle converge.

Nous avons plus haut que sa limite ne peut être que $A^8=p-\cfrac{1}{p-\cfrac{1}{p-\dots}}$

$$avec \quad A^8 = \frac{14159+\sqrt{14159^2-4}}{2}\approx 14158{,}99993$$