Enigme de la quinzaine n°7

Sujet n°7 (moyen)

Énoncé proposé par Frédéric de Ligt

- **Énoncé**

On dira qu'un nombre est trapézoïdal s'il peut s'exprimer comme une somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs dont le plus petit n'est pas nul. Ainsi par exemple 9 peut s'écrire 4 + 5 ou bien encore 2 + 3 +4. Quels sont les entiers qui sont des nombres trapézoïdaux ? Au fait, de combien de façons 2015 est-il un nombre trapézoïdal ?

Solution:

1) Je commence par observer les premiers nombres trapézoïdaux, à l'aide du tableur.

	A	B	C	D	E
1	entier	2consécutifs	3consécutifs	4consécutifs	5consécutifs
2	n	n+(n+1)	n+(n+1)+(n+2)	n+...+(n+3)	n+...+(n+4)
3	1	3	6	10	15
4	2	5	9	14	20
5	3	7	12	18	25
6	4	9	15	22	30
7	5	11	18	26	35
8	6	13	21	30	40
9	7	15	24	34	45
10	8	17	27	38	50
11	9	19	30	42	55
12	10	21	33	46	60
13	11	23	36	50	65

Je constate tout de suite que les nombres impairs (sauf 1) en sont, ainsi que les multiples de 3 de 5, etc...On y trouve aussi des nombres pairs, mais on note l'absence de 4,8,16 etc...

Je conjecture donc que les nombres trapézoïdaux sont:

les entiers qui ne sont pas des puissances de 2 (1 et 2, y compris),

ou autrement dit :

les entiers qui ont au moins un facteur premier impair dans leur décomposition en facteurs premiers.

Preuve:

-Soit T un nombre trapézoïdal, T peut s'écrire:

$$n+(n+1)+\ldots+(n+p-1),$$

où $n \geqslant 1$ est plus petit des $p \geqslant 2$ entiers consécutifs dont la somme vaut T.

On a donc T = $np+1+2+\ldots+(p-1) = np+\dfrac{p(p-1)}{2} = \dfrac{p(p+2n-1)}{2}$

Comme les nombres p et $p+2n-1$ sont de parité contraire, l'un des deux est pair et l'autre impair, il y a donc bien au moins un facteur impair dans la décomposition en facteurs premiers de T.

-Réciproquement, si N= $(2m+1)\times q$, alors on peut écrire

$$N=(q-m)+(q-m-1)+\ldots+(q-1)+q+(q+1)+\ldots+(q+m-1)+(q+m)$$

donc N est trapézoïdal. (*mais il faut que* $q>m\geqslant 1$ *)*

Si par malchance, $1\leqslant q\leqslant m$, comme par exemple N= 44 = $(2\times 5+1)\times 4$

alors on cherche à écrire N sous la forme $\dfrac{p(p+2n-1)}{2}$.

Avec N=44, cela donne $p(p+2n-1)$ = 88 = 8×11 --> on peut prendre p=8 et n=2

et on obtient N= $\dfrac{8(8+3)}{2}$ = $2+3+4+5+6+7+8+9$.

On peut généraliser cette démarche (*mais c'est pénible à écrire*). En prime, cela va nous permettre de trouver de quelles manières 2015 est un nombre trapézoïdal.

2) Je commence par décomposer $2015=5\times 13\times 31$

D'après le critère précédent, il s'agit bien d'un nombre trapézoïdal. Il l'est de sept façons:

1007+1008

401+402+403+404+405

197+198+199+200+201+202+203+204+205+206

149+150+151+152+153+154+155+156+157+158+159+160+161

65+66+67+68+69+70+71+72+73+74+75+76+77+78+79+80+81+82+83+84+85+86+87+88+89+90

50+...+65+...80

2+...+63

<u>En effet :</u>

On résout $\dfrac{p(p+2n-1)}{2}$ = 2015 c'est à dire $p(p+2n-1)=4030$.

$4030=2\times 5\times 13\times 31$ possède 16 diviseurs. On a donc:

$$p(p+2n-1)=1\times 4030=2\times 2015=5\times 806=10\times 403=13\times 310=26\times 155=31\times 130=62\times 65$$

Il n'y a que 7 possibilités pour le nombre *p* (*p=1* n'étant pas valable): *2,5,10,13,26,31 et 62*.
Chacune donne la valeur du nombre *n*.

p=2--> p+2n-1= 2015 donc 2n=2014 donc n=1007 d'où la 1ère possibilité: 1007+1008
p=5--> p+2n-1= 806 donc 2n=802 donc n=401 d'où la 2ème possibilité: 401+...+405
p=10--> p+2n-1= 403 donc 2n=394 donc n=197 d'où la 3ème possibilité: 197+...+206
p=13--> p+2n-1= 310 donc 2n=298 donc n=149 d'où la 4ème possibilité:149+...+161
p=26--> p+2n-1=155 donc 2n=130 donc n=65 d'où la 5ème possibilité:65+..+90
p=31--> p+2n-1=130 donc 2n=100 donc n=50 d'où la 6ème possibilité: 50+...+80
p=62--> p+2n-1= 65 donc 2n=4 donc n=2 d'où la 7ème possibilité:2+...+63

<u>Remarque:</u>

La prochaine année non trapézoïdale est 2048.... ca fait presque mille ans qu'on l'attend!