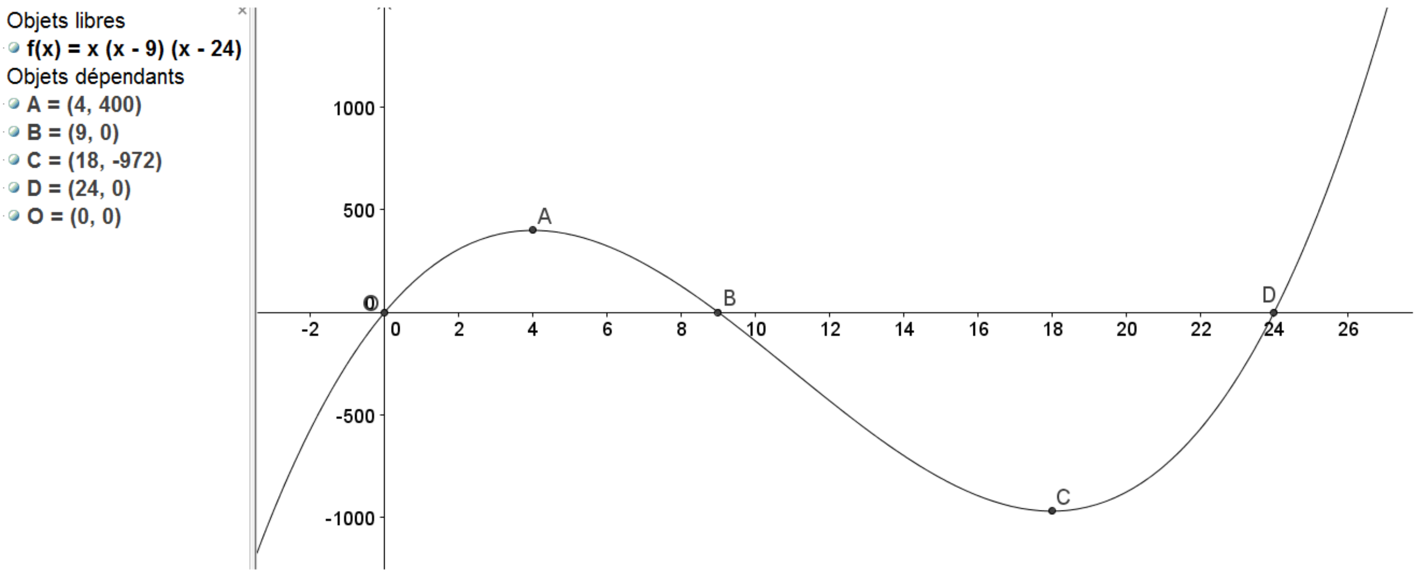
Enigme de la quinzaine n°5

Définition:
Soit $n \geqslant 1$ un nombre entier.
On dira qu'une fonction f est gentille si elle est polynomiale de degré n , avec n racines entières et distinctes.
Théorème :
Il existe des fonctions gentilles de degré 3, dont la dérivée est gentille.

Solution
Un exemple suffit à démontrer le théorème:

$$f(x)=x^3-33x^2+216x=x(x-9)(x-24) \text{ est gentille de degré 3}$$
$$\text{et sa dérivée } f'(x)=3x^2-66x+216=3(x-4)(x-18) \text{ est également gentille.}$$



Cela dit on aimerait bien en savoir plus:
Existe - t- il d'autres exemples non triviaux (translatées ou symétriques)?
Peut-on tous les trouver à l'aide d'une formule? À l'aide d'un algorithme?

Je commence par reformuler le problème:
Soit *f* une fonction gentille de degré 3, on peut, pour simplifier, l'écrire sous la forme:

$f(x)=x(x-b)(x-d)$ (en supposant le polynome unitaire et avec la plus petite racine nulle)

alors $f'(x)=3x^2-2(b+d)x+bd$ a toujours deux racines a et c (avec $0<a<b<c<d$)

puisque $\Delta=4(b+d)^2-4\times3\times bd=4(b^2+d^2-bd)=4((b-d)^2+bd)>0$

f' est donc gentille si et seulement si les racines a et c sont entières.

$$\text{Or } a=\frac{b+d-\sqrt{(d-b)^2+db}}{3} \quad \text{et} \quad c=\frac{b+d+\sqrt{(d-b)^2+db}}{3}$$

Il faut donc que le nombre sous la racine soit un carré parfait....
Or, dire que ***(d-b)²+db* est un carré parfait** revient à dire que l'équation ***x²+y²-xy=z²* a des solutions entières**.

On sait résoudre certaines **équations diophantiennes** de ce type. C'est par exemple le cas des *triplets pythagoriciens,* à l'aide de formules bien connues.

Une des difficultés à établir ces formules est de s'assurer qu'elles donnent bien toutes les solutions.

Dans notre cas, c'est justement ça qui me bloque, je n'arrive pas à trouver **une formule** qui donne toutes les solutions (*mais seulement certaines: voir plus bas :"la formule décevante"*).

Je vais donc me contenter de chercher des valeurs de b et de d, telles que **(b-d)²+bd soit un carré.**
Je vais même me limiter à chercher des valeurs multiples de 3, pour être sur d'obtenir a et c entiers.

Avec le tableur, je cherche toutes les possibilités avec $0<a<b<c<d<200$: J'obtiens 38 solutions

d	24	24	45	45	48	48	63	63	72	72	90	90
b	9	15	21	24	18	30	15	48	27	45	42	48
c	18	20	35	36	36	40	45	56	54	60	70	72
a	4	6	9	10	8	12	7	18	12	18	18	20

Etc...

d	96	96	105	105	120	120	120	120	126	126	135	135
b	36	60	33	72	21	45	75	99	30	96	63	72
c	72	80	77	90	84	90	100	110	90	112	105	108
a	16	24	15	28	10	20	30	36	14	36	27	30

d	144	144	144	144	165	165	168	168	180	180	189	189	195	195
b	39	54	90	105	48	117	63	105	84	96	45	144	27	168
c	104	108	120	126	120	143	126	140	140	144	135	168	135	182
a	18	24	36	40	22	45	28	42	36	40	21	54	13	60

Il est donc possible de construire un **algorithme** qui, une fois fixée la plus grande racine, va chercher toutes les possibilités.

Conclusion
Mon but initial était d'avoir au moins quelques spécimens de ces fonctions pour les donner aux élèves en exercice ou en évaluation. C'est chose faite. J'ai 38 exemples prêts à l'emploi....
(*et je ne parle pas des symétries et translations qui m'en donnent encore plusieurs infinités*).

En revanche, pour ce qui est de la formule qui donnerait toutes les solutions, ou mieux, de la méthode permettant de résoudre les équations diophantiennes (ou même juste certaines), il reste du travail...

La formule décevante

L'equation $x^2+y^2-xy=z^2$ se ramène à $u^2+3v^2=w^2$ en posant $u=x-\frac{y}{2}$, $v=\frac{y}{2}$ et $z=w$
(*ce qui impose que y soit pair!*)
Ensuite on s'inspire des triplets pythagoriciens, pour trouver un paramétrage des solutions primitives:
u=3m²-n² *v=2mn et* *w=3m²+n²*

On a bien $u^2+3v^2=(3m^2-n^2)^2+3(2mn)^2 = 9m^4-6m^2n^2+n^4+12m^2n^2 = (3m^2+n^2)^2 = w^2$

on en déduit $x=u+v=3m^2-n^2+2mn$ et $y=2v=4mn$ (et $z=3m^2+n^2$)

ce qui nous donne en revenant à notre problème initial :

$$d=3m^2-n^2+2mn \qquad b=4mn$$

$$a=\frac{(b+d-w)}{3}=\frac{(3m^2-n^2+6mn-3m^2-n^2)}{3}=\frac{(2mn-2n^2)}{3}$$

$$c=\frac{(b+d+w)}{3}=\frac{(3m^2-n^2+6mn+3m^2+n^2)}{3}=2m^2+2mn$$

Mais ces formules ne donnent pas autant de solutions qu'on en voudrait (*il manque au moins celles avec des nombres tous impairs)...* C'est décevant!