Un carré parfait dans une suite ! - publié le 21/10/2014

Sujet n°3 (moyen)

• Énonce

On considère la suite (u_n) définie par $u_1=1, u_2=6$ et $u_{n+1}^2-1-u_{n+2}u_n=0$.
Montrer que $8u_nu_{n+1}+1$ est un carré parfait.

Solution

D'entrée, à l'aide du tableur,
je calcule les premiers termes de u_n ,

(en remarquant que $u_{n+2}=\dfrac{u_{n+1}^2-1}{u_n}$ si u_n ne s'annule pas*)

puis **je conjecture** aisément que:

1) $v_n=8u_nu_{n+1}+1=(u_n+u_{n+1})^2$

2) Tous les u_n sont entiers

A4 =(A3^2-1)/A2

	A	B	C	D	E
1	u_n		v_n=8*u_n*u_n+1 +1	racine (v_n)	
2	1		49	7	"=1+6"
3	6		1681	41	"=6+35"
4	35		57121	239	"=35+204"
5	204		1940449	1393	1393
6	1189		65918161	8119	8119
7	6930		2239277041	47321	47321
8	40391		76069501249	275807	275807
9	235416		2584123765441	1607521	1607521
10	1372105		87784138523761	9369319	9369319
11	7997214		2,98E+015	54608393	54608393
12	46611179		1,01E+017	318281039	318281039
13	271669860		3,44E+018	1855077841	1855077841

Réglons d'abord le problème du cas $u_n=0$ (qui se produit tout de même lorsque n=0).*
Si $u_n=0$ alors d'après la relation $u_{n+1}^2-1-u_nu_{n+2}=0$ on aurait $u_{n+1}^2=1$ donc u_{n+1} ne serait pas défini de manière unique (pouvant valoir deux valeurs 1 ou -1).
L'énoncé considérant que la suite est définie, on peut donc supposer que pour $n\geqslant 1$ on a $u_n\neq 0$, et on pourra donc diviser par u_n autant qu'il nous plaira...

Place ensuite à la preuve de la première conjecture (par récurrence)

Posons $v_n=8u_nu_{n+1}+1$ pour $n\geqslant 1$ et démontrons la propriété: pour tout $n\geqslant 1$ $v_n=(u_n+u_{n+1})^2$

Initialisation
Pour n=1 on a $v_1=8u_1u_2+1=8\times 1\times 6+1=49$ et $(u_1+u_2)^2=(1+6)^2=49$
donc v_1 est bien le carré parfait annoncé.

Hérédité
Supposons que pour un certain $n\geqslant 1$ on ait $v_n=(u_n+u_{n+1})^2$,
c'est à dire $(u_n+u_{n+1})^2-8u_nu_{n+1}-1=0$ ou plus simplement $u_n^2-6u_nu_{n+1}+u_{n+1}^2-1=0$

Prouvons qu'alors pour cet entier $n\geqslant 1$ on ait aussi $v_{n+1}=(u_{n+1}+u_{n+2})^2$

Pour cela calculons $(u_{n+1}+u_{n+2})^2-v_{n+1}$

$$= u_{n+1}^2+2u_{n+1}u_{n+2}+u_{n+2}^2-8u_{n+1}u_{n+2}-1$$
$$= u_{n+1}^2-1-6u_{n+1}u_{n+2}+u_{n+2}^2$$
$$= u_nu_{n+2}-6u_{n+1}u_{n+2}+u_{n+2}^2 \qquad \text{(car } u_{n+1}^2-1-u_nu_{n+2}=0 \text{ par définition)}$$
$$= u_{n+2}(u_n-6u_{n+1}+u_{n+2}) \qquad \text{(en factorisant } u_{n+2}\text{)}$$

$$= u_{n+2}\frac{(u_n^2-6u_nu_{n+1}+u_nu_{n+2})}{u_n} \qquad (\textit{puisque } u_n \neq 0)$$

$$= u_{n+2}\frac{(u_n^2-6u_nu_{n+1}+u_{n+1}^2-1)}{u_n} \qquad (\textit{car } u_{n+1}^2-1=u_nu_{n+2} \textit{ comme plus haut})$$

$$= \frac{u_{n+2}\times 0}{u_n} \qquad (\textit{par hypothèse de récurrence})$$

$= 0$

Donc $v_{n+1}=(u_{n+1}+u_{n+2})^2$ ..... et la propriété est héréditaire.

Conclusion 1

La première conjecture est donc bien validée d'après le principe de récurrence.
Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n=8u_nu_{n+1}+1$ est bien un carré...celui de (u_n+u_{n+1}) .

Pour que ce carré soit parfait il suffit de vérifier que les u_n sont des nombres entiers, *ce qui n'a rien d'évident et qui tient même du miracle lorsqu'on pense que* $u_{n+2}=\frac{u_{n+1}^2-1}{u_n}$ ....*(ce serait d'ailleurs faux avec* $u_1=2$ *par exemple)*

Pour prouver cette deuxième conjecture, j'ai testé beaucoup de pistes sans succès, mais j'ai finalement remarqué que la suite u_n vérifiait une autre relation beaucoup plus simple et classique (*récurrente linéaire d'ordre 2*) :

$$u_{n+2}=6u_{n+1}-u_n \text{ pour tout } n \geqslant 1 \text{ avec } u_1=1 \text{ et } u_2=6$$

Cette relation prouve directement que les u_n sont tous des entiers, et nous donne en prime la formule explicite de u_n : $u_n=\frac{\sqrt{2}}{8}((3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n)$ (*après étude classique : équation caractéristique, et recherche des coefs à partir de* u_1 *et* u_2 *: je passe les détails*)

Pour prouver que la suite u_n de l'exercice est bien la même que celle ci, il suffit de vérifier la relation $u_{n+1}^2-1-u_nu_{n+2}=0$ à l'aide de la formule explicite.

Un bon calcul à peine fastidieux(*je passe aussi les détails*) le montre:

$$u_nu_{n+2} = ... = \frac{1}{32}((17+12\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{2n}+(17-12\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^{2n}-34)$$

$$u_{n+1}^2-1 = ... = \frac{1}{32}((17+12\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^{2n}+(17-12\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^{2n}-2)-1$$

Les deux expressions sont bien égales.

Conclusion 2

Donc la suite u_n de l'exercice est bien définie par l'une ou l'autre des deux relations de récurrence(*verte ou bleue*) , et comme les deux premiers termes sont identiques, il s'agit bien de la même suite.

Conclusion finale

J'ai donc bien démontré que $v_n=8u_nu_{n+1}+1$ est un carré parfait pour tout $n \geqslant 1$

(et ça marcherait aussi avec n=0)

Remarque:

C'est sans doute l'exemple de la suite de fibonnacci (suite récurrente linéaire d'ordre 2) qui vérifie une relation du même type : $f_{n+1}^2-f_nf_{n+2}=(-1)^n$ *qui m'a inspiré l'idée d'une relation plus simple... Ce genre de lien entre les relations doit sans doute se généraliser?*