MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Les candidats traitent **deux exercices.**

Exercice académique 1 : Toutes séries

DES PROMENADES DANGEREUSES

Partie A :
On appelle suite unitaire U, une suite finie ou infinie, de premier terme $U_1 = 1$, et dont tous les autres termes sont égaux à +1 ou -1. Si la suite est finie, le nombre de ses termes est sa longueur.
Exemple : 1 ; 1 ; -1 ; -1 ; 1 ; -1 ; -1 est une suite unitaire de longueur 7
Écrire les termes d'une suite unitaire de longueur 8, dont la somme des termes est +2, dont la somme des termes de rang pair est -2 et dont la somme des termes dont les rangs sont multiples de 3 est +2.

Partie B : 7 amis numérotés de 1 à 7 sont au départ d'une route étroite bordée par deux fossés profonds. Une ligne médiane (en pointillés gras) partage la route en 2, et deux autres lignes (en pointillés fins) longent les deux fossés. Le point de départ D est indiqué sur la ligne médiane.
Une suite U unitaire est donnée qui modélise les déplacements des 7 amis sur la route.
-1 indique que le promeneur fait un pas en avant mais en allant sur la ligne immédiatement à droite si elle existe, sinon il tombe dans le fossé et sa promenade s'arrête.
+1 indique que le promeneur fait un pas en avant mais en allant sur la ligne immédiatement à gauche si elle existe, sinon il tombe dans le fossé et sa promenade s'arrête.
Pour se déplacer :

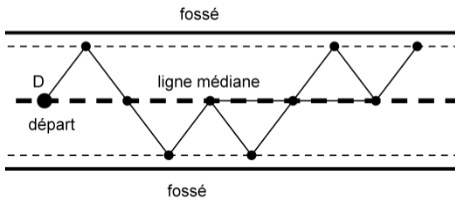
l'ami n°1 lit dans l'ordre tous les termes de la suite,

l'ami n°2 lit dans l'ordre tous les termes de rang pair de la suite, et uniquement ceux-là,

et pour tout entier $\in \{3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7\}$,

l'ami n°k lit dans l'ordre tous les termes de la suite dont le rang est un multiple de k et uniquement ceux-là.

1. Soit la suite unitaire V de longueur 9 : 1 ; -1 ; -1 ; 1 ; -1 ; 1 ; 1 ; -1 ; 1. La trajectoire de l'ami n°1 associée à cette suite est représentée ci-contre.
   Faire le dessin de la route sur votre copie, et dessinez la trajectoire de 4 pas de l'ami n°2.
2. On voudrait modifier un terme unique de la suite V de telle façon que 4 parmi les 7 amis tombent dans un fossé pendant leur promenade. Montrer que c'est impossible.

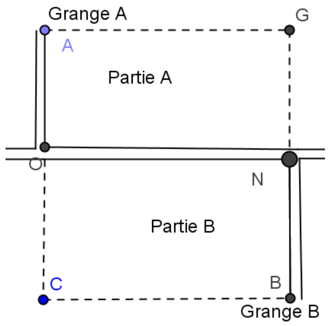


Partie C : On dit qu'une suite unitaire U est sécurisée pour cette route si elle modélise les déplacements des 7 amis sans qu'aucun ne tombe dans un fossé.
1. Décrire toutes les suites unitaires sécurisées de longueur 7. Expliquer la démarche.
2. Montrer qu'il n'existe pas de suite unitaire sécurisée de longueur 12.

Partie D : Paul E., un mathématicien, emmène avec lui 3 amis parmi ceux qui portent un numéro impair. Ils se rendent près d'une autre route plus large, bordée elle aussi de deux fossés profonds, et sur laquelle sont peintes cinq lignes parallèles équidistantes, numérotées de 1 à 5, la ligne 3 étant la ligne médiane.
Paul tend à chacun des 3 amis une feuille sur laquelle apparaissent les 1000 termes d'une même suite unitaire. Il leur dit que, malgré sa longueur, cette suite est sécurisée pour cette route, du fait qu'elle contient cinq lignes. Il explique qu'ils doivent suivre les mêmes règles que celles indiquées en partie B et que cette suite est leur guide. Puis il leur demande de commencer leur promenade, en partant tous en même temps du point D indiqué sur la ligne médiane, et en adoptant tous la même vitesse.
Au 58ème pas, Paul leur dit : « À partir de maintenant et avant la fin de votre promenade, vous allez vous trouver au moins deux fois positionnés de la même façon sur les lignes numérotées. »
Quel raisonnement Paul a-t-il fait pour être si sûr de lui ? Et quels sont les 3 amis qui ont participé à cette promenade ?

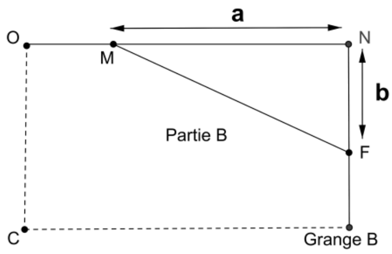
Exercice académique n°2 : Série S
Trajet Minimal

Un agriculteur possède un terrain rectangulaire, divisé par une route en deux parties A et B. L'agriculteur dispose de deux granges A et B distantes chacune de 1,5 km de la route principale $OA = NB = 1{,}5$ km et les deux chemins $[OA]$ et $[NB]$ sont distants de $ON = 3$ km, comme le montre la figure ci-contre. (La largeur de la route est négligeable.)
L'agriculteur se déplace avec son tracteur pour aller de la grange A à la grange B. Il a la possibilité soit d'emprunter chemin et route sur lesquels il roule à 5 km/h, soit de passer à travers champs en ligne droite.
Sur la partie A, il roule à la vitesse de 4 km/h et sur la partie B sa vitesse tombe à 3 km/h.



Partie 1: Le trajet en un minimum de temps

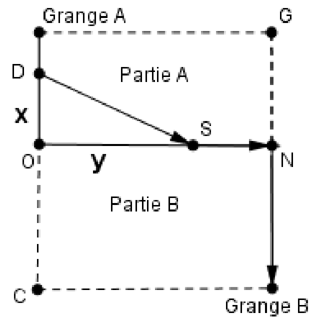
1. Déterminer le temps mis par l'agriculteur s'il emprunte les chemins et la route seulement.
2. Déterminer le temps mis par l'agriculteur s'il décide de passer à travers champs en ligne droite.
3. On se place sur la zone B, et on suppose que le tracteur quitte la route en un point M et rejoint le chemin au point F. On note T_c la durée du trajet MF à travers champs et T_r la durée du trajet MNF par la route et le chemin.
   a. Montrer que : $T_c^2 - T_r^2 = \frac{9(a-b)^2+7(a^2+b^2)}{225}$.
   b. Comparer T_c et T_r et en déduire le trajet optimal sur la zone B.



4. On suppose maintenant que, sur la zone A, le tracteur quitte le chemin en un point D et rejoint la route au point S. Ensuite, il se rend à la grange B par le trajet SNB. On note $x = OD$ et $y = OS$ (voir figure ci-contre).
   a. Exprimer le temps du trajet T de la grange A à la grange B en fonction de x et de y.

On suppose que x est fixé et qu'il existe un réel α tel que $y = \alpha x$.

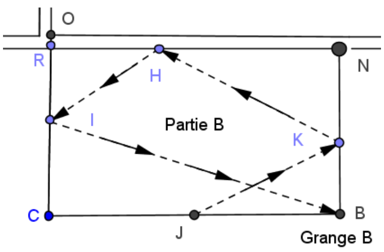
   b. Montrer que le temps T en fonction de α est :
   $T(\alpha) = \frac{6}{5} + x\left(\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{4} - \frac{1}{5} - \frac{\alpha}{5}\right)$.
   c. Montrer que le minimum T_m de la fonction T est atteint pour $\alpha = \frac{4}{3}$. (Indication: si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\alpha) = \sqrt{1+\alpha^2}$ alors $f'(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$.)
   d. Donner l'expression de T_m en fonction de x et en déduire que T_m est minimal si x est maximal.



5. Déterminer la longueur du trajet que l'agriculteur doit emprunter pour arriver en un minimum de temps à la grange B. Quelle est la durée de ce trajet ?

Partie 2: Le trajet minimal

Sur la partie B l'agriculteur décide d'installer quatre points d'approvisionnement, le premier point est le milieu J du chemin $[BC]$ et la trajectoire suivie par l'agriculteur est donnée par la figure ci-contre.
À quels endroits précis K, H et I l'agriculteur doit-il placer les points d'approvisionnement pour que le trajet parcouru soit minimal ? Quelle est la longueur d'un tel trajet ?

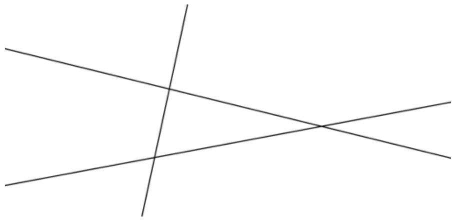


Exercice académique n°2 : Séries ES – L – STMG – ST2S
Droites en position générale

Dans une figure géométrique, on dit que des droites sont en *position générale* lorsque :

2 droites quelconques sont non parallèles ET 3 droites quelconques sont non concourantes.

On va s'intéresser ici au nombre de zones délimitées (bien entendu une droite est infinie), ainsi qu'au nombre de triangles. Pour la figure ci-contre constituée de 3 droites en position générale, on observe 7 zones et 1 triangle.



Partie 1 : Nombre de zones

Pour tout entier naturel n, on note z_n le nombre de zone(s) du plan délimitée(s) quand on construit n droite(s) en position générale.

1. Recopier et compléter le tableau ci-contre pour les premières valeurs de z_n

Nombre de droites n	Nombre de zones z_n
0	1
1	…
2	…
3	…
4	…

2. On souhaite déterminer z_5.
   a. Réaliser une figure avec 4 droites d_1, d_2, d_3 et d_4 en position générale. On peut alors visualiser le nombre z_4 de zones trouvé précédemment.
   b. Tracer une cinquième droite d_5 d'une couleur différente, de telle sorte que les 5 droites soient en position générale.
   c. En coupant les 4 droites d_1, d_2, d_3 et d_4, combien de zones initialement délimitées la droite d_5 a-t-elle coupé ? En déduire le nombre de zones z_5 délimitées dans la figure à 5 droites.
3. On veut généraliser. On considère un entier naturel non nul n et une figure contenant $n-1$ droites en position générale.
   a. On trace une n-ième droite d_n. Combien de zones cette droite coupe-t-elle ?
   b. En déduire une expression de z_n en fonction de n. (On vérifiera que la formule permet de retrouver la valeur de z_5.)

On donne la formule suivante pour tout entier naturel n : $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

4. Est-il possible de délimiter 2017 zones avec des droites en position générale ?

Partie 2 : Nombre de triangles

Pour tout entier naturel n, on note t_n le nombre de triangle(s) formé(s) dans une figure constituée de n droite(s) en position générale.

1. Recopier et compléter le tableau ci-contre pour les premières valeurs de t_n.

Nombre de droites n	Nombre de triangles t_n
0	0
1	…
2	…
3	…
4	…

2. On souhaite trouver la valeur de t_5.
   a. Construire une figure avec 4 droites d_1, d_2, d_3 et d_4 en position générale. On peut alors visualiser le nombre t_4 de triangles trouvé précédemment.
   Tracer une cinquième droite d_5 d'une couleur différente, de telle sorte que les 5 droites soient en position générale.
   Justifier que cette droite d_5 fait apparaître un nouveau triangle avec chaque paire de droites déjà présentes.
   b. Lister les paires de droites possibles avec les droites d_1, d_2, d_3 et d_4. Conclure sur la valeur de t_5.

3. On souhaite généraliser. En partant d'une figure constituée de $n-1$ droites en position générale où apparaissent t_{n-1} triangles, combien de nouveaux triangles l'ajout d'une n-ième droite fait-il apparaître ?

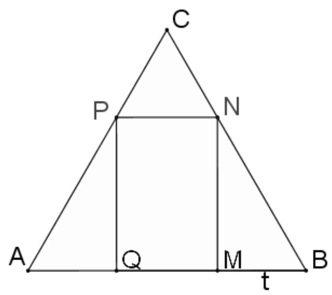
   En déduire que $t_n = t_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.
4. Est-il possible de trouver un entier naturel n pour lequel une figure de n droites en position générale fait apparaître un nombre de triangles supérieur au nombre de zones ?

Exercice académique n°2 : Séries STI2D – STL – STD2A
Restauration d'un vitrail

Un maître verrier souhaite rénover un vitrail dont la forme est un triangle équilatéral de côté 2 m.

Partie 1 : Rectangle d'aire maximale

L'artisan souhaite dans un premier temps insérer un motif rectangulaire de couleur bleue. Il souhaite de plus optimiser l'apport de lumière bleue en choisissant le rectangle d'aire maximale.



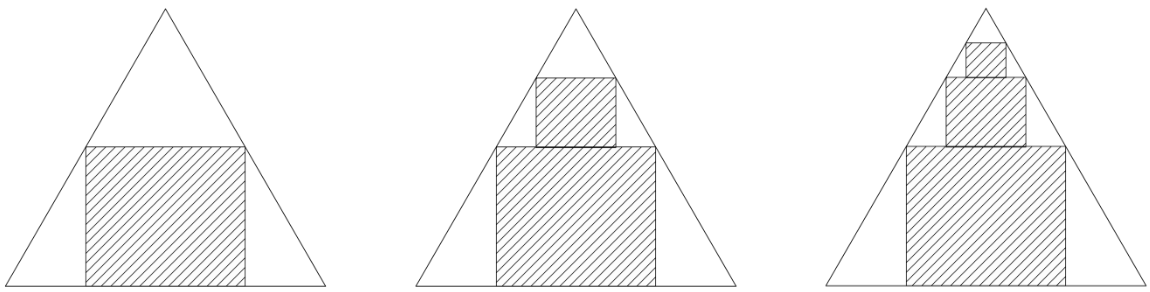
Pour les besoins de notre étude, nous allons introduire les notations suivantes :
On nomme ABC le triangle. On introduit un point M sur le segment $[AB]$ de telle sorte que la longueur BM, notée t, vérifie $t \in]0\,;1[$.

Par la suite, on place les points $N \in [CB]$, $P \in [AC]$ et $Q \in [AB]$ tels que $MNPQ$ soit un rectangle.

1. Montrer que $MN = \sqrt{3}MB$.
2. Donner l'expression $f(t)$ de l'aire du rectangle $MNPQ$ en fonction du réel t.
3. Justifier qu'il existe une position du point M sur le segment qui rend l'aire maximale. Quelle est alors l'aire du rectangle $MNPQ$? Quelles en sont les dimensions ?

Partie 2 : Rectangles gigognes

L'artisan souhaite continuer sa restauration en respectant la commande suivante : ajouter dans la partie supérieure triangulaire du vitrail un nouveau motif rectangulaire bleu d'aire maximale.
Et cette opération devra être effectuée plusieurs fois.
On visualise les premières étapes de son travail avec les figures suivantes. On va ici procéder à une construction géométrique en plusieurs étapes :



Étape 1 Étape 2 Étape 3

1. Démontrer que, à l'étape 1, le triangle supérieur est une réduction du triangle équilatéral initial avec un coefficient de $\frac{1}{2}$ pour les longueurs.
2. Donner les aires des deux vitraux rectangulaires ajoutés respectivement à l'étape 2 puis à l'étape 3.
3. On considère un entier $n \geq 1$. On souhaite connaître l'aire totale hachurée à l'étape n. On note cette surface $S(n)$.
   a. Donner une expression de $S(n)$ comme somme de n termes.
   b. Justifier que $S(n) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$.

On rappelle que pour tout nombre $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

4. Si le maître verrier continuait sa restauration avec une infinité d'étapes, quelle proportion du vitrail initial serait colorée en bleu ?