Solution du problème de la sphère inscrite dans quatre sphères

Les centres O_1, O_2, O_3, O_4 des quatre sphères deux à deux tangentes sont les sommets d'un tétraèdre régulier. Si on note R le rayon commun des sphères, l'arête du tétraèdre vaut $2R$. On sait que la hauteur de ce tétraèdre vaut alors $2\sqrt{\frac{2}{3}}R$ et que le sommet O_4 tombe sur le centre de gravité du triangle $O_1O_2O_3$. On introduit un repère orthonormé tel que :

$$O_1\ (R, 0, 0)\ ;\ O_2\ (-R, 0, 0)\ ;\ O_3\ (0, \sqrt{3}R, 0)\ ;\ O_4\ (0, \frac{\sqrt{3}}{3}R, 2\sqrt{\frac{2}{3}}R)$$

Les plans médiateurs des segments $[O_1O_2]$, $[O_2O_3]$, $[O_1O_3]$ ont pour intersection la droite d perpendiculaire au plan contenant O_1, O_2, O_3 et passant par le centre de gravité G du triangle $O_1O_2O_3$. Comme les coordonnées de G sont $(0, \frac{\sqrt{3}}{3}R, 0)$, alors la droite d a pour équation

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}R \end{cases}$$

Le centre C (x, y, z) de la sphère inscrite à l'intérieur des quatre sphères appartient à la droite d mais est aussi équidistant des points O_1 et O_4. On a donc $CO_4^2 = CO_1^2$. Les coordonnées du point C vérifient par conséquent les équations :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}R \\ x^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{3}R)^2 - (z - 2\sqrt{\frac{2}{3}}R)^2 = (x-R)^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

Il en sort facilement que $z = \frac{R}{\sqrt{6}}$. Le point C a donc pour coordonnées $(0, \frac{\sqrt{3}}{3}R, \frac{R}{\sqrt{6}})$.

Le rayon de la sphère inscrite vaut $CO_4 - R$ soit $2\sqrt{\frac{2}{3}}R - \frac{R}{\sqrt{6}} - R = R(\frac{3}{\sqrt{6}} - 1)$