Corrigé du sujet n$^{\text{o}}$ 14

On peut supposer que : $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5$ et posons $m = \inf\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}(x_i - x_j)^2$.

Par l'absurde : Supposons que $m > \dfrac{1}{10}$.

On a d'une part : $x_{i+1} - x_i > \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

D'autre part pour tout couple $(i, j) \in [\![1, 5]\!]^2$ avec $j > i$, on a : $x_j - x_i > \dfrac{1}{\sqrt{10}}(j - i)$,

puis en sommant cette dernière relation, on obtient : $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}(x_i - x_j)^2 > \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}(j - i)^2 \times \dfrac{1}{10}$.

Or $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}(j - i)^2 = 50$, donc $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}(x_i - x_j)^2 > 5$.

On remarque que : $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}(x_i - x_j)^2 = 5\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{5} x_i)^2 \leqslant 5$.

Contradiction