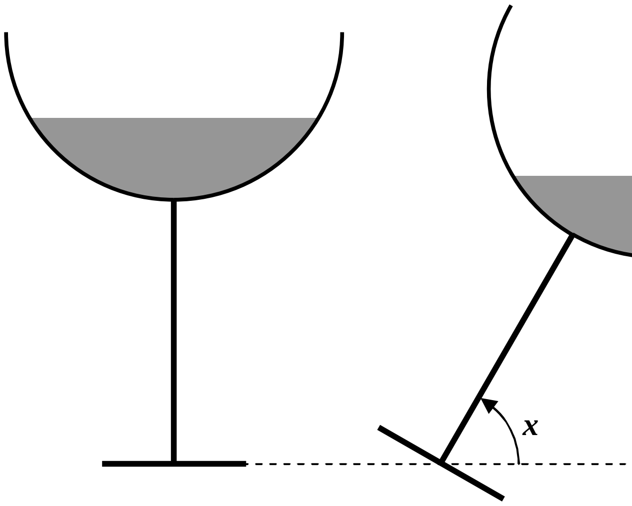
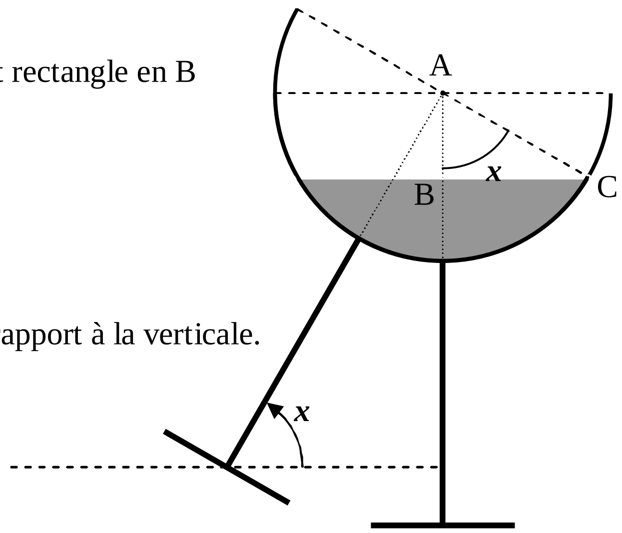
Énigmes $1^{ère}$ – Terminale.

1. Le verre penché …



Un verre hémisphérique est rempli sur la moitié de sa hauteur.
Quel est l'angle minimum x selon lequel on peut pencher ce verre sans renverser de liquide ?

Réponse : Un petit dessin pour fixer les idées …



D'après les données de la figure le triangle ABC est rectangle en B et $AB = \frac{AC}{2}$. Alors on a :

$\cos \boldsymbol{x} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$ soit $\boldsymbol{x} = 60°$.

Autrement dit, on peut pencher le verre de 30° par rapport à la verticale.

NB : on peut ajouter à l'énoncé :
la capacité du verre est de 16 cl. Quelle est le volume de liquide dans le verre ?

* On détermine le rayon : 16 cl = 160 cm^3. $V_{verre} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi R^3$ soit $160 = \frac{2}{3} \pi R^3$ soit $R^3 = \frac{240}{\pi} \approx 76{,}4$

  Soit **$R \approx 4{,}24$** cm.

* On démontre par le calcul intégral ou on admet le résultat suivant :

  $V_{liquide} = \frac{\pi}{3} h^2(3R - h)$ où h est la hauteur de liquide dans la sphère et R le rayon de la sphère.

  Ici $h = \frac{1}{2}R$ Soit $V_{liquide} = \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{4}R^2 \times (3R - \frac{1}{2}R) = \frac{\pi}{12} R^2 \times \frac{5}{2} R = \frac{5\pi}{24} R^3 = \frac{5\pi}{24} \times \frac{240}{\pi} = 50$ en cm^3 soit **5 cl**.

2. “Struggle for life”.
Sur une île chaque jour et dans cet ordre, chaque loup tue un mouton, chaque mouton tue un serpent et chaque serpent tue un loup. Après 10 jours il ne reste plus sur l’île qu’un mouton et aucun autre animal. Combien y avait-il d’animaux de chaque espèce au départ ?

Solution :

Soit L_n, M_n et S_n le nombre respectif de loups, moutons et serpents après n jours.
On a alors :
$M_n = M_{n-1} - L_{n-1}$;
$S_n = S_{n-1} - M_n$;
$L_n = L_{n-1} - S_n$.

On obtient alors :
$S_n + M_n = S_{n-1}$;
$L_n + S_n = L_{n-1}$;
$M_n + L_{n-1} = M_{n-1}$ soit $M_{n-1} = M_n + L_n + S_n$.

On sait que $M_{10} = 1$; $S_{10} = 0$ et $L_{10} = 0$.

Méthode 1 : Avec un tableur, on obtient le résultat suivant :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				**moutons**	**loups**	**serpents**		
2	après	10	jours	1	0	0	début jour	11
3	après	9	jours	1	0	1	début jour	10
4	après	8	jours	2	1	2	début jour	9
5	après	7	jours	5	3	4	début jour	8
6	après	6	jours	12	7	9	début jour	7
7	après	5	jours	28	16	21	début jour	6
8	après	4	jours	65	37	49	début jour	5
9	après	3	jours	151	86	114	début jour	4
10	après	2	jours	351	200	265	début jour	3
11	après	1	jour	816	465	616	début jour	2
12			**Départ**	**1897**	**1081**	**1432**	début jour	1

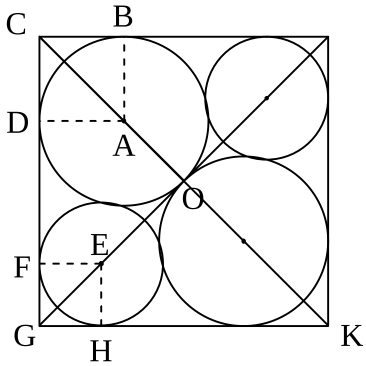
Méthode 2 : avec un algorithme :

Entrées
Saisir *n*, M, N, S

Traitement
N reçoit 10, M reçoit 1, N reçoit 0, S reçoit 0
Pour *i* allant de *n* – 1 à 0
    P reçoit M
    Q reçoit L
    R reçoit S
    M reçoit P + Q + R
    L reçoit Q + R
    S reçoit P + R
Fin pour

Sorties
Afficher M, N, S.

3. Cercles dans un carré.
On construit dans un carré de côté 1, quatre cercles comme l'indique la figure ci-dessous.
Calculer les rayons de ces cercles.



Solution : On pose R et r les longueurs respectives des grands cercles et des petits cercles. Donc $r < R$.

* Le carré a pour longueur de côté 1 (unité), donc sa diagonale CK = $\sqrt{2}$ (longueur diagonale d'un carré).
Comme O est le milieu de [CK], alors OC = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

* Les droites (CB) et (CD) sont tangentes au cercle de centre A, donc $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$. De plus $\widehat{DCA} = 90°$.
Le quadrilatère ABCD a trois angles droits et deux côtés consécutifs égaux (DA = AB = R),
donc ABCD est un carré.
Donc $\underline{AC = \sqrt{2}R}$ (longueur diagonale d'un carré).

* Or on a : OC = OA + AC $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = R + \sqrt{2}R$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = (1+\sqrt{2})R$ $\Leftrightarrow$ $R = \dfrac{\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})}$

Soit $R = \dfrac{\sqrt{2}\,(1-\sqrt{2})}{2\,(1+\sqrt{2})\,(1-\sqrt{2})}$ soit $\boxed{\boldsymbol{R = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}}$ soit $\underline{R \approx 0{,}29}$.

* Pour les mêmes raisons que le carré ABCD, EFGH est un carré. Donc $\underline{EG = \sqrt{2}r}$.

* Le petit cercle et le grand cercle sont tangents, donc AE = $R + r$.

* OAE est un triangle rectangle en O, car (OA) et (OE) sont les diagonales du carré.
Donc d'après Pythagore : $AE^2 = AO^2 + OE^2$ soit $(R+r)^2 = R^2 + OE^2$ soit $OE^2 = (R+r)^2 - R^2$.

* Or on a : OG = OE + EG soit $(OG - EG)^2 = OE^2$ soit $(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}r)^2 = (R+r)^2 - R^2$

soit $\dfrac{1}{2} - 2r + 2r^2 = R^2 + 2rR + r^2 - R^2$ soit $\dfrac{1}{2} - 2r + r^2 - r\,(2-\sqrt{2}) = 0$ soit $2r^2 - 2(4-\sqrt{2})r + 1 = 0$

Discriminant réduit : $\Delta' = (4-\sqrt{2})^2 - 2\times 1 = 16 - 8\sqrt{2} = 4(4-2\sqrt{2})$

D'où les solutions $r_1 = \dfrac{(4-\sqrt{2}) - 2\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2} \approx 0{,}21$ et $r_2 = \dfrac{(4-\sqrt{2}) + 2\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2} \approx 2{,}37$

Comme $r < R$, alors on a : $\boxed{\boldsymbol{r = 2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{4-2\sqrt{2}}}}$.