$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)+\cos\left(\frac{9\pi}{20}\right)=\,?}$$

$\psi=\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)+\cos\left(\frac{9\pi}{20}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{20}\right)$. ψ est positif et $\psi^2=1+\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\Longrightarrow \boxed{\psi=\sqrt{1+\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}}$

$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est positif $\Longrightarrow \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2}}}$

De $X^4+X^3+X^2+X+1=\prod_{k=1}^{4}\left(X-e^{i\frac{2k\pi}{5}}\right)$ on déduit, par identification des termes qui nous intéressent :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{-1}{2}$$

Soit $\phi=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, on obtient de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=2\phi^2-1$: $4\phi^2+2\phi-1=0\Longrightarrow\phi=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\Longrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{8}}$

D'où, en simplifiant après avoir remplacé dans les expressions encadrées précédentes : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)+\cos\left(\frac{9\pi}{20}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}}$.

Remarque sur la « dernière ligne droite »(simplification des calculs)
Soit $\omega\in\mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{\omega}\notin\mathbb{Q}$ alors $\mathbb{Q}[\sqrt{\omega}]$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dim 2 dont une base est donnée par $\mathscr{B}(1;\sqrt{\omega})$.

Propriété.
Soit $\omega\in\mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{\omega}\notin\mathbb{Q}$.
Soient a, $b\in\mathbb{Q}$ et $\Delta=a^2-\omega b^2$. Alors :
$\sqrt{\Delta}\in\mathbb{Q}$ et au moins l'un des deux réels $\sqrt{\frac{a\pm\sqrt{\Delta}}{2}}\in\mathbb{Q}\Longleftrightarrow\exists\ c,\ d\in\mathbb{Q}$ tels que $\sqrt{a+b\sqrt{\omega}}=c+d\sqrt{\omega}$