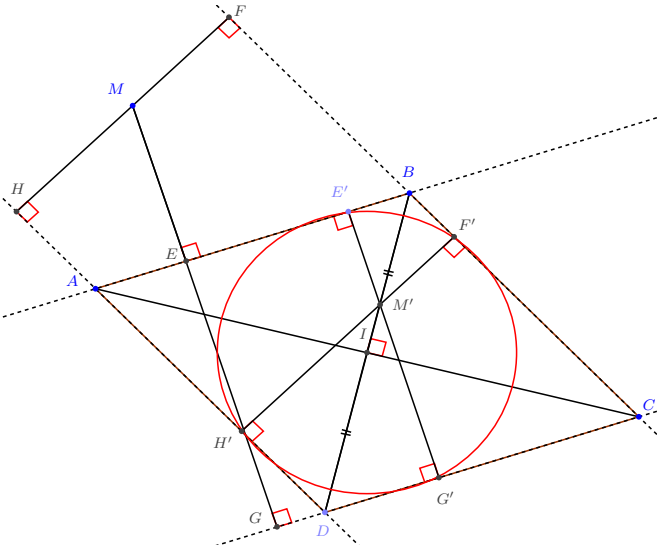
1er cas : le quadrilatère est un losange



Étant donné un losange ABCD et un point M quelconque, considérons ses projetés orthogonaux E, F, G et H respectivement sur (AB), (BC), (CD) et (DA). En dehors du cas où M est un sommet du losange, nous avons 4 points distincts qui ne peuvent pas être alignés, sauf cas trivial où le losange est aplati. Ils sont donc cocycliques si et seulement si il n'y a que 3 projetés distincts, quand M est un sommet du losange, ou bien lorsque se présente l'égalité entre angles de droites suivante :

$$(EF, EG) = (HF, HG)$$

Or : $(HF, HG) = (HM, HG) = (DM, DG) = (DM, DC)$ car H, M, G et D sont cocycliques sur un cercle de diamètre [DM].
De même : $(EF, EG) = (EF, EM) = (BF, BM) = (BC, BM)$ car E, F, M et B sont cocycliques sur un cercle de diamètre [BM].
E, F, G et H sont donc cocycliques si et seulement si :

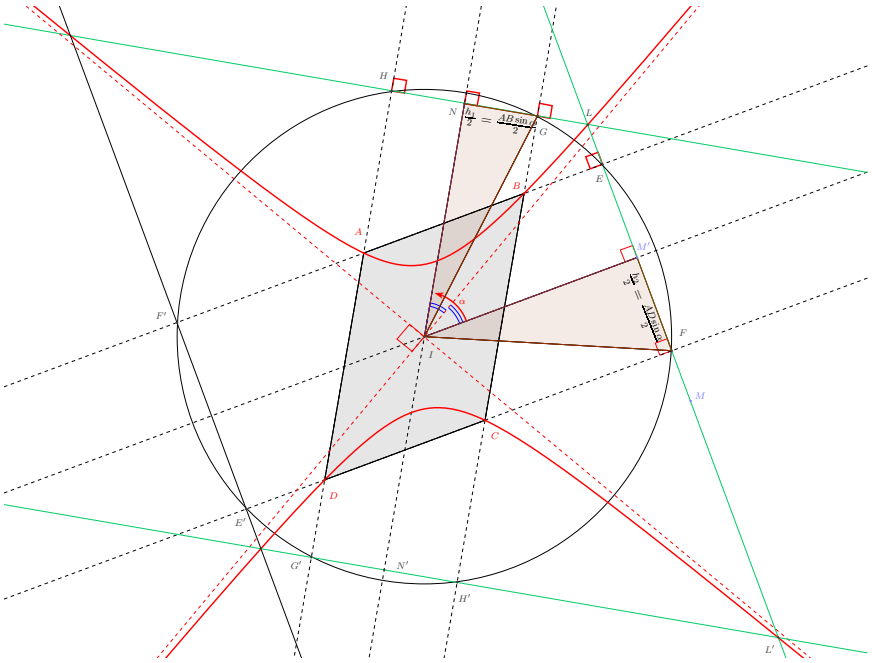
$$(DM, DC) = (BC, BM)$$

Jusque là nous n'avons utilisé que les propriétés du parallélogramme ABCD, si on suppose de plus qu'il s'agit d'un losange, ses diagonales sont des axes de symétrie qui permettent d'écrire : $(DC, DB) = (BD, BC)$. En additionnant membres à membres les deux dernières égalités, la condition nécessaire et suffisante pour que nos projetés soient cocycliques devient :

$$(DM, DB) = (BD, BM)$$

Cela signifie que dans le triangle BDM, les angles géométriques de sommets B ou D sont égaux ou supplémentaires. Le cas où ils sont supplémentaires se présente quand BDM est un triangle aplati, M est alors sur la diagonale (BD), la condition $(DM, DB) = (BD, BM)$ revient à une égalité entre angles nuls. Dans le cas où les angles géométriques de sommets B ou D sont égaux, le triangle BDM est isocèle en M, ce point est alors sur la médiatrice de [BD], qui n'est autre que la deuxième diagonale (AC) du losange. On peut donc conclure que E, F, G et H sont cocycliques, si et seulement si M est sur l'une des deux diagonales du losange. Dans un cas plus général ci-dessous, on verra que le centre du cercle passant par les 4 projetés est aussi le centre du losange.

2e cas : le quadrilatère est un parallélogramme



Le problème est bien plus beau à résoudre dans ce cas là. Un cercle passant par les projetés d'un point M quelconque sur les supports de 2 côtés parallèles, a nécessairement son centre sur la médiatrice de ces deux projetés. Sur la figure ci-dessous les projetés E et F sont sur une perpendiculaire à (AB) et (CD) passant par M, la médiatrice d de [EF] n'est autre qu'une médiane du parallélogramme passant par le centre I du parallélogramme. Un même raisonnement, montre qu'un cercle passant par les projetés du même point M sur les supports de l'autre paire de côtés parallèles, a nécessairement son centre sur l'autre médiane. Si les 4 projetés sont cocycliques, ils le sont donc sur un cercle de centre I. Sur la figure de droite, on a d'abord tracé le cercle de centre I et rayon IE = IF. Si le rayon de ce cercle est suffisamment grand, il recoupe les supports des côtés du parallélogramme aux sommets de deux rectangles EFE′F′ et GHG′H′, qui admettent eux aussi I pour centre.

Tous les points de (EF) ont les même projetés sur (AB) et (CD), seuls 2 points de cette droite peuvent nous fournir des projetés sur les autres côtés, pouvant être cocycliques avec les deux précédents. Il s'agit de L et L′ à l'intersection avec (GH) et (G′H′). Soit M′ l'intersection de (EF) et de la médiane du parallélogramme parallèle à (AB) et (CD). L'ensemble des points qui déterminent 4 projetés cocycliques, peut donc être obtenu comme lieu du point L ou L′, lorsque M′ parcourt la médiane.

Soit α une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)$, et posons $h_1 = EF = AD.\sin(\alpha)$, c'est la mesure de la hauteur de ABCD relative à (AB), de même $h_2 = HG = AB.\sin(\alpha)$ est la mesure de la hauteur de ABCD relative à (AD) ; on a $h_1 = h_2$ dans le cas d'un losange. Considérons le repère orthonormé direct $(I, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ a même direction, même sens que $\overrightarrow{AB}$. Dans ce repère M′ parcourt l'axe des abscisses, calculons les coordonnées de L ou L′, en fonction de l'abscisse $x_{M'}$ de M′. Le rayon r du cercle passant par E, F, G et H vérifie :

$$r^2 = IF^2 = x_{M'}^2 + \frac{h_1^2}{4} = IG^2 = IN^2 + \frac{h_1^2}{4}$$

Lorsque r est suffisamment grand, on peut construire les points N et N′ tels que : $IN = IN' = \sqrt{x_{M'}^2 + \frac{h_1^2 - h_2^2}{4}} = d$; N a alors pour coordonnées dans notre repère : $(d.\cos(\alpha); d.\sin(\alpha))$, N′ a des coordonnées opposées. Les droites (LN) et (L′N′) perpendiculaires à (IN) ont une équation de la forme : $x.\cos(\alpha) + y.\sin(\alpha) = b$, elle doit être vérifiée par N et N′, on a donc $b = d$ ou $b = -d$. Puisque L etL′ ont même abscisse que M′, leur ordonnée y doit donc vérifier :

$$\left(x_{M'}.\cos(\alpha) + y.\sin(\alpha)\right)^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_{M'}^2.\cos(\alpha)^2 + y^2.\sin(\alpha)^2 + 2x_{M'}y.\cos(\alpha).\sin(\alpha) = x_{M'}^2 + \frac{h_1^2 - h_2^2}{4}$$

Les coordonnées de L et L′ vérifie donc l'équation :

$$x^2(\cos(\alpha)^2 - 1) + y^2\sin(\alpha)^2 + 2xy.\cos(\alpha).\sin(\alpha) = \frac{AD^2 - AB^2}{4}\sin(\alpha)^2$$

ce qui est équivalent à :

$$(x^2 - y^2)\sin(\alpha) - 2xy\cos(\alpha) = \frac{AB^2 - AD^2}{4}\sin(\alpha)$$

On reconnait là l'équation d'une hyperbole équilatère, nous allons effectuer un changement de repère pour en préciser la position. Il sera plus commode d'utiliser des affixes complexes, pour effectuer une rotation du repère, en posant $z = e^{i\theta}Z$, où z est l'affixe de $L(x;y)$ et $Z = X + iY$. Notre équation devient alors :

$$\frac{z^2 + \overline{z}^2}{2}\sin(\alpha) + \frac{z^2 - \overline{z}^2}{2}i\cos(\alpha) = \frac{AB^2 - AD^2}{4}\sin(\alpha)$$

$$\left(e^{2i\theta}Z^2 + e^{-2i\theta}\overline{Z}^2\right)\sin(\alpha) + \left(e^{2i\theta}Z^2 - e^{-2i\theta}\overline{Z}^2\right)i\cos(\alpha) = \frac{AB^2 - AD^2}{2}\sin(\alpha)$$

$$iZ^2e^{2i\theta}\left[\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)\right] - i\overline{Z}^2e^{-2i\theta}\left[\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\right] = \frac{AB^2 - AD^2}{2}\sin(\alpha)$$

Il faut effectuer une rotation d'angle θ telle que $\alpha = 2\theta$ pour obtenir :

$$i\left(Z^2 - \overline{Z}^2\right) = \frac{AB^2 - AD^2}{2}\sin(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad X.Y = \frac{AD^2 - AB^2}{8}\sin(\alpha)$$

On aboutit à l'équation d'une hyperbole équilatère admettent les axes du repère pour asymptotes. La rotation d'angle $\frac{\alpha}{2}$ pour effectuer le changement de repère, montre que ces axes sont les bissectrices des médianes de ABCD

> Le lieu des points qui se projettent orthogonalement sur les 4 côtés d'un parallélogramme, en 4 points cocycliques est une hyperbole équilatère, passant par les 4 sommets du parallélogramme et qui admet pour asymptotes les 2 bissectrices des médianes du parallélogramme

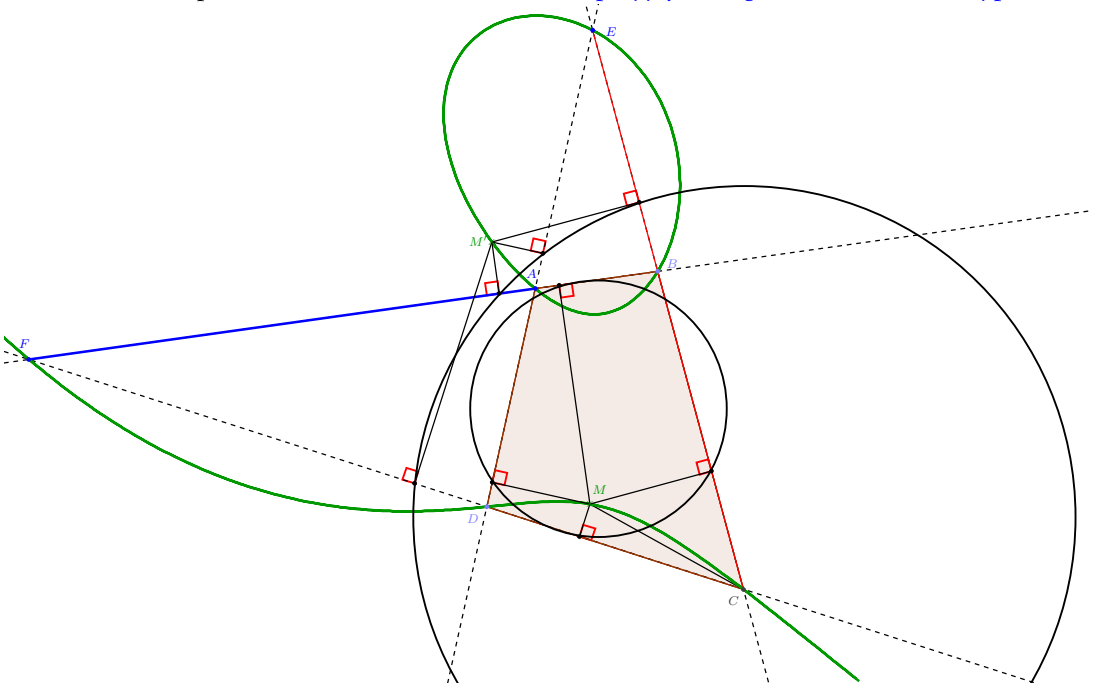
Dans le cas du losange, on a $h_1 = h_2$, les coordonnées de L et L′ vérifient donc l'équation : $(x^2 - y^2)\sin(\alpha) - 2xy\cos(\alpha) = 0$
On a donc : $x = \frac{y\cos(\alpha)+y}{\sin(\alpha)} = y\frac{\cos(\alpha)+1}{\sin(\alpha)}$ ou $x = \frac{y\cos(\alpha)-y}{\sin(\alpha)} = y\frac{\cos(\alpha)-1}{\sin(\alpha)}$
On voit apparaître les équations des diagonales perpendiculaires du losange de coefficient directeur $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $-\text{cotan}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$,car :

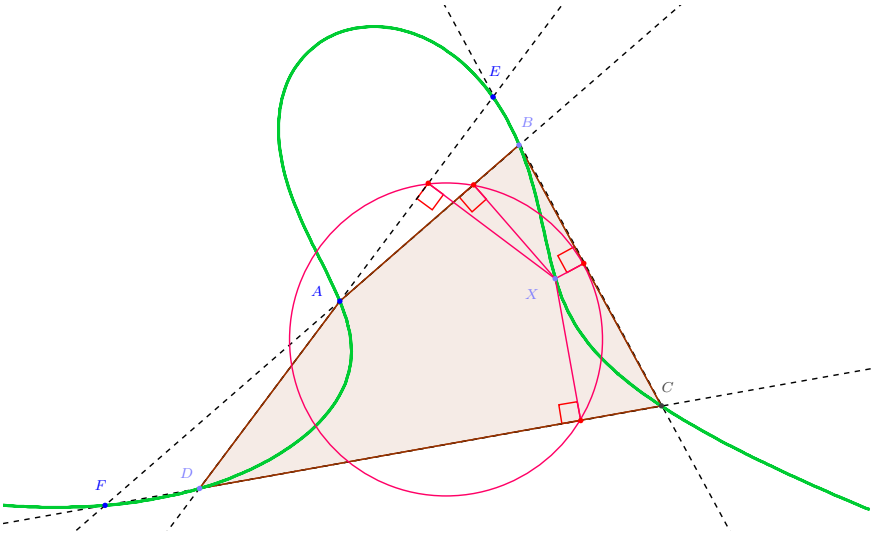
$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)+1} = \frac{2\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})}{\cos^2(\frac{\alpha}{2})-\sin^2(\frac{\alpha}{2})+1} = \frac{2\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})}{2\cos^2(\frac{\alpha}{2})} = \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\cos(\frac{\alpha}{2})} \quad \text{et} \quad \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)-1} = \frac{2\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})}{\cos^2(\frac{\alpha}{2})-\sin^2(\frac{\alpha}{)}-1} = \frac{2\sin(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\alpha}{2})}{-2\sin^2(\frac{\alpha}{2})} = -\frac{\cos(\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}$$

Ces 2 droites sont en fait l'hyperbole dégénérée du cas général. Dans le cas du carré avec $\cos(\alpha) = 0$ et $\sin(\alpha) = 1$, on obtient les droites d'équations $y = \pm x$.

3e cas : le quadrilatère est quelconque

Apparemment on obtient rien de bien familier, comme en témoigne les courbes en vert ci-dessous, obtenues en demandant le lieu des points répondant à la question, au logiciel «GEOGEBRA-4». En faisant varier le quadrilatère ABCD on obtient des courbes algébriques parfois connexes, parfois en plusieurs morceaux. Son protocole de construction est disponible à l'adresse suivante : http ://lyc-marguerite-valois-math.fr/personnel/fig4.html.





On peut constater avec «Geogebra», que le lieu des centres des cercles est une droite, je n'ai pas encore réussi à prouver cette conjecture que GEOGEBRA ne dément pas.