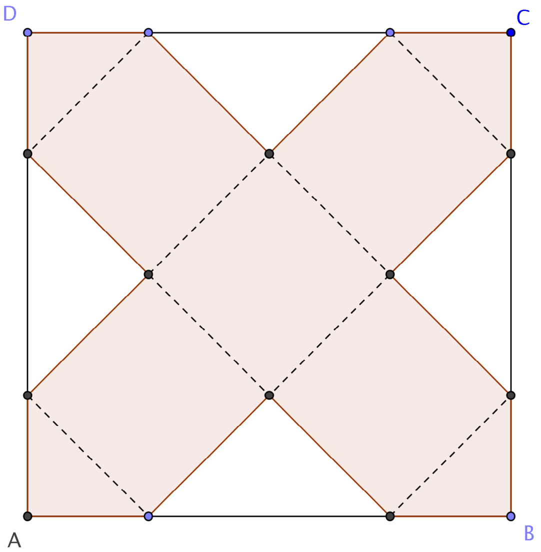
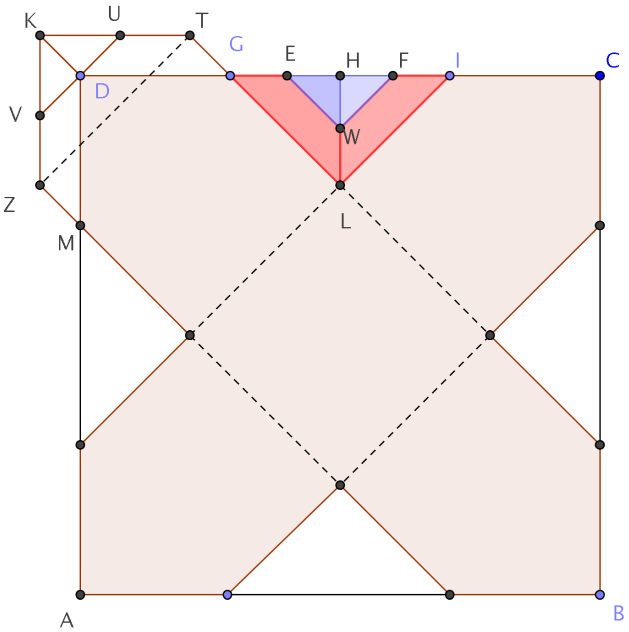
On a découpé les parties restées en blanc d'une feuille de carton ABCD, carrée de 12 cm de côté comme indiqué sur la figure à gauche ci-dessous. On a ainsi fabriqué le patron d'un cube. Après pliage selon les pointillés et collage avec du ruban adhésif, quel est le volume du cube obtenu ?





Pour qu'il n'y ait aucune chute de carton, on propose de recoller à l'aide de ruban adhésif les morceaux, pour construire le patron de même forme que le précédent, mais de dimensions plus grandes comme indiqué sur la figure de droite ci-dessus. Les morceaux trapézoïdaux GLWE et ILWF sont déplacés et recollés en DGTU et DMZV, les morceaux triangulaires HWE et HWF sont déplacés et recollés en DUK et DVK. On opère de même avec les 3 autres chutes de cartons, afin d'obtenir ainsi le cube le plus volumineux possible. Quel est le volume maximum ainsi obtenu ?

Solution

Il n'est pas demandé de justifier que les patrons sont bien constitués de faces carrées,
ce qui peut être fait simplement et rapidement en les construisant comme homothétiques du patron d'un cube quelconque construit au préalable. Désignons par a la mesure de l'arête du cube obtenu avec le premier patron. Le côté de la feuille de carton carrée dans laquelle est découpée ce patron peut être décomposé en 3 segments, dont l'un a pour mesure la même que celle de la diagonale d'une face du cube, et deux autres dont la mesure est la même que celle d'une demi diagonale. On a donc : $2a\sqrt{2}=12$ (en cm). Donc : $a=3\sqrt{2}$

Le volume du 1er cube est donc : $a^3=54\sqrt{2}$

Désignons par b la mesure de l'arête du cube obtenu avec le deuxième patron.

L'aire totale de carton utilisé est $6b^2$. On a donc : $6b^2=12^2$; (en cm^2)

Le volume du 1er cube est donc $b^3=\left(2\sqrt{6}\right)^3$

Le volume maximum obtenu avec une feuille de 12 cm de côté est donc : $48\sqrt{6}$