<u>Enoncé :</u>
Quand le tennisman Roger Federer est au service il a 72 % de chances de gagner le point (statistiques du tournoi de Roland Garros 2014). A-t-il pour autant 72 % de chances de remporter le jeu (si ce jeu n'est pas décisif) ?

Soit un jeu joué par Federer au service.
Appellons G l'évènement : G : « Fédérer gagne le jeu »
Appellons A l'évènement :
A : « à aucun moment au cours du jeu le score atteint 40-40 »
On a alors : $p(G)=p(G\cap A)+p(G\cap \bar{A})$

On désigne par p la probabilité pour Fédérér de gagner un point donné. Dans l'exercice p=0,72

1) Calculons $p(G\cap A)$

L'évènement $G\cap \bar{A}$ est réalisé ssi l'un des 3 évènements disjoints 2 à 2 suivants est réalisé :
Fédérer gagne 4 points à la suite. $p_1=p^4$
Fédérer joue 5 points, en gagne 4, <u>dont le dernier</u> $p_2=4\mathrm{p}^3(1-p)p=4\mathrm{p}^4(1-p)$ car $\binom{4}{3}=4$
Fédérer joue 6 points, en gagne 4, <u>dont le dernier</u> $p_3=10\mathrm{p}^3(1-p)^2 p=10\mathrm{p}^4(1-p)^2$ car $\binom{5}{3}=10$

Ainsi : $p(G\cap A)=p_1+p_2+p_3=p^4(10\mathrm{p}^2-24\mathrm{p}+15)$

En faisant p=0,72 , on trouve $p(G\cap A)\approx 0{,}7804$

La réponse à la question posée dans l'énoncé est donc « non », mais on va être plus précis en continuant le calcul de p(G)

2) Calculons $p(G\cap \bar{A})=p(\bar{A})\times p(G/\bar{A})$

L'évènement $\bar{A}$ est réalisé si parmi les 6 premiers points , 3 ont été gagnés par Fédérer et 3 par son adversaire.
On a alors : $p(\bar{A})=20\mathrm{p}^3(1-p)^3$ car $\binom{6}{3}=20$
On suppose que l'évènement $\bar{A}$ est réalisé. Le score est de 40-40. Le nombre de points à jouer pour finir le jeu est pair , à cause de la règle de l'avantage. Soit 2n ce nombre de points.
Appelons g_n la probabilité pour Fédérer de gagner le jeu en jouant 2n points de plus.
Pour que Fédérer gagne en jouant 2n points de plus, il faut et il suffit que n-1 fois sucessivement , il gagne 1 point puis qu'il en perde 1(ou l'inverse), puis qu'il gagne les 2 derniers.
On a donc : $g_n=[2\mathrm{p}(1-p)]^{n-1}\times p^2=2^{n+1}p^{n+1}(1+p)^{n-1}$
g est une suite géométrique de raison $q=2\mathrm{p}(1-p)$ et de premier terme $g_1=p^2$
L'étude de la fonction f définie par $f(x)=2(1-x)x$ dans l'intervalle]0;1[montre que la raison q est dans]0;1[.
On a : $p(G/\bar{A})=\sum_1^{\infty} g_n=\frac{p^2}{1-2\mathrm{p}(1-p)}=\frac{p^2}{2\mathrm{p}^2-2\mathrm{p}+1}$

et donc : $p(G\cap \bar{A})=20\mathrm{p}^3(1-p)^3\times\frac{p^2}{2\mathrm{p}^2-2\mathrm{p}+1}=\frac{20\mathrm{p}^5(1-p)^3}{2\mathrm{p}^2-2\mathrm{p}+1}\approx 0{,}1423$ si p=0,72

La probabilité de Roger Fédérer de gagner un jeu lorsqu'il est au service est donc :
$p(G)=p(G\cap A)+p(G\cap \bar{A})\approx 0{,}7804+0{,}1423=0{,}9227$
<u>Remarque :</u> une simulation avec Algobox (jointe) semble confirmer ce résultat.