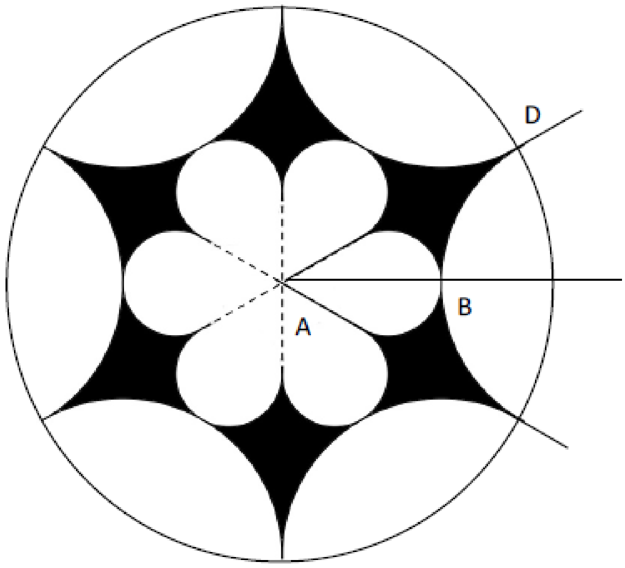
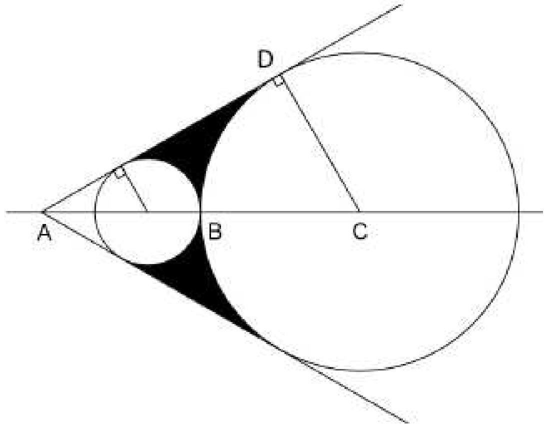
Exercice National 1 : ***La Rosace***

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

Rosace



Motif :



1. Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?

2. *a*. Montrer que $\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$.

   b. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?

   c. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$.

   Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

Correction (proposée par l’académie d’Amiens):

1. On constate que le motif se retrouve 6 fois dans la rosace. Donc l’angle vaut 60°.
2. *a*. <u>Première méthode :</u>
   Notons D le sommet tel que ACD soit rectangle en D.
   La droite (AC) étant une bissectrice, on a donc $\widehat{CAD} = 30°$. Donc $\widehat{BCD} = 60°$.
   Et puisque $BC = DC$, le triangle BCD est donc équilatéral.
   Ensuite, $\widehat{BDA} = 30°$, donc le triangle ABD est isocèle en B, d’où $BD = BA$.
   Finalement, on trouve bien $AB = BC$.
   <u>Deuxième méthode :</u>
   On note R le rayon du grand cercle.
   On applique une formule de trigonométrie : $\sin \widehat{DAC} = \dfrac{DC}{AC}$, d’où $\sin 30° = \dfrac{R}{AC}$.
   Puisque $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$, on obtient $AC = 2R$.
   Or $BC = R$, d’où $AB = R$. Finalement $AB = BC$.

   b. Notons E le centre du petit cercle et r le rayon de ce cercle.
   En appliquant le résultat précédent, il vient que $AE = 2r$. De plus, $EB = r$.
   On obtient donc $AB = 3r$, c’est-à-dire $R = 3r$.
3. On doit avoir $AD = 3\sqrt{3}$, c’est-à-dire $\sqrt{(2R)^2 - R^2} = 3\sqrt{3}$, d’où $R = 3$. Puis $r = 1$.
4. Si $r = \dfrac{1}{2}$, alors l’autre côté du petit triangle vaut $r\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Donc l’aire du petit triangle est $\dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

   D’autre part, on a : $R = 3r = \dfrac{3}{2}$, et l’autre côté du grand triangle vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, donc l’aire du grand triangle vaut $\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$.

   La partie noire à l’intérieur du triangle ACD s’obtient en retranchant au grand triangle le petit, le secteur $\widehat{BEF}$ (où F est le point tel que AEF est rectangle en F), et le secteur $\widehat{BCD}$.

   Cette surface vaut donc $\dfrac{9\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{3} - \dfrac{\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2}{6} = \sqrt{3} - \dfrac{11\pi}{24}$.

   Il reste à multiplier par 12 pour obtenir l’aire totale : $12\sqrt{3} - \dfrac{11\pi}{2}$.