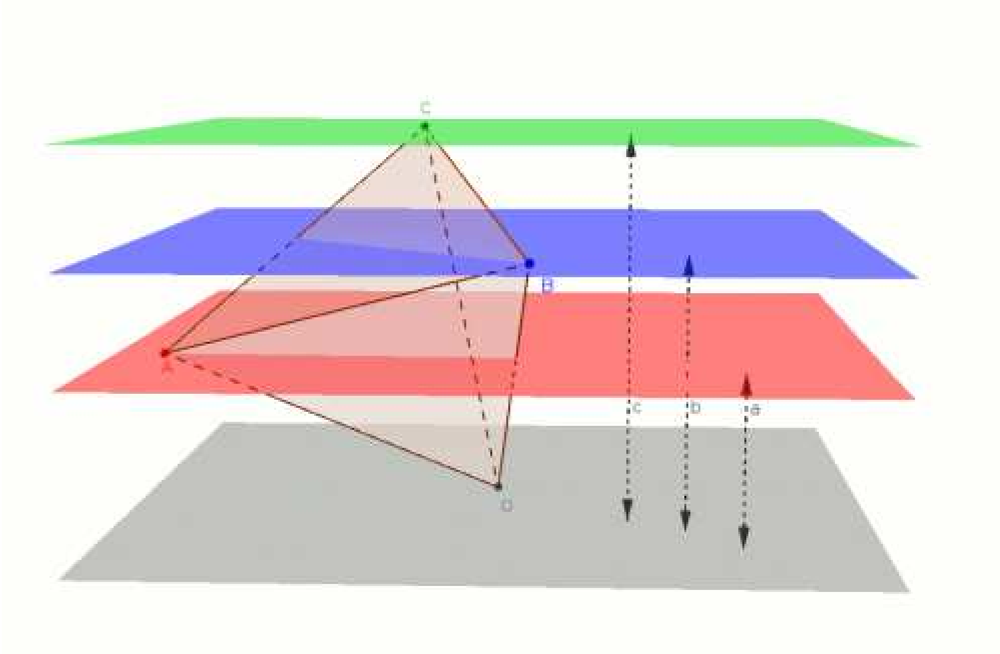
Tétraèdre, es-tu là ? (Sujet n° 5)

Énoncé :

Étant donné 4 plans parallèles, montrez qu'il existe au moins un tétraèdre régulier admettant un sommet dans chaque plan. Quelle est la longueur de son arête en fonction des nombres a, b et c mesurant les distances entre les plans selon la figure ci-dessous.



Solution : Un début….

En considérant un repère orthonormé d'origine O, d'axe (oz) orthogonal aux différents plans et d'axes (Ox) et (Oy) de tel sorte que le point A $\in$ (xOz), les quatre points du tétraèdre OABC, ont pour coordonnées : O(0 ; 0 ; 0), A(x_A ; 0 ; a), B(x_B ; y_B ; b) et C(x_C ; y_C ; c)

Pour simplifier un peu on va effectuer une homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{a}$ pour obtenir des coordonnées de la forme O(0 ; 0 ; 0), A(m ; 0 ; 1), B(p; q ; d) et C(r ; s ; e) et les quatre plans ont alors pour équation respective z = 0, z = 1, z = d et z = e.

Le but du problème est de déterminer la longueur k des arêtes du tétraèdre en fonction de d et e.

En traduisant OA = OB = OC = AB = AC = BC = k, on obtient :

① : $m^2 + 1 = k^2$

② : $p^2 + q^2 + d^2 = k^2$

③ : $r^2 + s^2 + e^2 = k^2$

④ : $(p - m)^2 + q^2 + (d - 1)^2 = k^2$

⑤ : $(r - m)^2 + s^2 + (e - 1)^2 = k^2$

⑥ : $(r - p)^2 + (s - q)^2 + (e - d)^2 = k^2$

En s'aidant d'un logiciel de calcul formel, on obtient la solution : $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3d^2 - 2d(e+1) + 3e^2 - 2e + 3}$

que l'on peut aussi écrire $k = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4(d^2 + e^2 + 1) - (d + e + 1)^2}$ qui est une longueur possible de l'arête du tétraèdre.

Pour revenir au problème original, il reste à effectuer l'homothétie inverse donc de rapport a.

L'arête du tétraèdre sera donc $ka = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2}}$ **.**

Olivier Rochoir