Deviner les valeurs ! (Sujet n° 13)

Énoncé :

Soit f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x : $f(f(x)) = x^2 - 2x + 2$.
Déterminer les valeurs possibles de f(0).

Solution :

Posons f(0) = k et notons $g(x) = x^2 - 2x + 2$ et (*) la relation f(f(x)) = g(x).

On a, d'après (*), f(f(0)) = g(0) ce qui donne f(k) = 2.
On a, toujours d'après (*), f(f(k)) = g(k) ce qui donne $f(2) = k^2 - 2k + 2$.
En prenant x = 2 dans (*), on obtient f(f(2)) = g(2) ce qui donne $f(k^2 - 2k + 2) = 2$.
On a alors $f(f(k^2 - 2k + 2)) = f(2)$ c'est-à-dire $f(f(k^2 - 2k + 2)) = k^2 - 2k + 2$ ce qui peut aussi s'écrire $g(k^2 - 2k + 2) = k^2 - 2k + 2$
Le réel $k^2 - 2k + 2$ est donc un point fixe de la fonction g.
Recherchons les points fixes de la fonction g (c'est-à-dire les nombres x vérifiant g(x) = x).
$x^2 - 2x + 2 = x$ devient $x^2 - 3x + 2 = 0$ ce qui donne x = 1 et x = 2.
Le réel k vérifie donc $k^2 - 2k + 2 = 1$ ou $k^2 - 2k + 2 = 2$.
L'équation $k^2 - 2k + 2 = 1$ donne $k^2 - 2k + 1 = 0$ d'où k = 1.
L'équation $k^2 - 2k + 2 = 2$ donne $k^2 - 2k = 0$ d'où k = 0 ou 2.
Les seules valeurs possibles pour k sont donc parmi 0 ; 1 ou 2.

• Supposons que f(0) = 0
On a alors, d'après (*), f(f(0)) = g(0) ce qui donne f(0) = 2 d'où une contradiction donc $k \neq 0$.

• Supposons que f(0) = 1
On a alors, d'après (*), f(f(0)) = g(0) ce qui donne f(1) = 2.
On a ensuite, d'après (*), f(f(1)) = g(1) ce qui donne f(2) = g(1) donc f(2) = 2.
Puis f(f(2) = g(2) qui donne f(2) = 2. Il n'y a pas de contradiction.

• Supposons que f(0) = 2
On a alors, d'après (*), f(f(0)) = g(0) ce qui donne f(2) = 2.
On a ensuite, d'après (*), f(f(2)) = g(2) ce qui donne f(2) = 2. Il n'y a pas de contradiction.

Les seules valeurs possibles pour f(0) semblent donc être **1 et 2**.

Olivier Rochoir