Sujet 7 - Les nombres trapézoïdaux

Énoncé :

On dira qu'un nombre est trapézoïdal s'il peut s'exprimer comme une somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs dont le plus petit n'est pas nul. Ainsi par exemple 9 peut s'écrire 4 + 5 ou bien encore 2 + 3 + 4. Quels sont les entiers qui sont des nombres trapézoïdaux ? Au fait, de combien de façons 2015 est-il un nombre trapézoïdal ?

Solution :

Il est clair que **tous les nombres impairs (différents de 1) sont des nombres trapézoïdaux**. En effet, la somme de deux nombres consécutifs est toujours impair : $n + (n+1) = 2n + 1$.

Pour étudier le cas général, notons n le plus petit entier et k le nombre d'entiers que l'on ajoute.

On a donc $n \geq 1$ et $k \geq 2$ et $S = n + (n+1) + (n+2) + \dots + (n+k-1)$.

Puisque la somme des p premiers entiers non nuls est obtenue à l'aide de la formule $\frac{p(p+1)}{2}$, on a $S = \frac{(n+k-1)(n+k)-(n-1)n}{2} = \frac{2nk+k^2-k}{2} = \frac{k(2n-1+k)}{2}$

☞ Supposons que k soit pair : $k = 2m$ avec $m \geq 1$.

On a alors $S = m(2n-1+2m)$ et donc soit $S = impair \times impair$ soit $S = pair \times impair$ suivant la parité de m (le nombre $2n-1+2m$ étant toujours impair ≥ 3).

☞ Supposons que k soit impair : $k = 2m+1$ avec $m \geq 1$ (car on ajoute au moins deux nombres, ici au moins trois).

On a alors $S = (2m+1)(n+m)$ et donc soit $S = impair \times impair$ soit $S = pair \times impair$ suivant la parité de $n+m$ (le nombre $2m+1$ étant toujours impair ≥ 3).

On s'aperçoit alors que dans tous les cas, on a toujours dans la décomposition un nombre impair supérieur ou égal à 3. Ainsi, **il n'est pas possible d'obtenir les nombres de la forme 2^q** (qui ne contiennent pas d'impair dans leur décomposition). Mais certains nombres pairs peuvent quand même être obtenus (par exemple si $n+m$ est pair dans la deuxième décomposition).

• La question qui se pose maintenant est :

« Tous les nombres pairs (différents de 2^q) peuvent ils être obtenus ? ».

La réponse est oui :

Soit N un entier pair différent de 2^q. Il peut donc s'écrire $N = p \times i$ où p est pair et i impair.

On souhaite déterminer les valeurs de n et k de tel manière que $N = S$ soit $p \times i = \frac{k(2n-1+k)}{2}$.

☞ Si $i \leq 2p-1$, posons $k = i$ et $n = \frac{2p-i+1}{2}$ et N peut alors s'écrire $\frac{k(2n-1+k)}{2}$.

☞ Si $i \geq 2p-1$, posons $k = 2p$ et $n = \frac{i-2p+1}{2}$ et N peut alors s'écrire $\frac{k(2n-1+k)}{2}$.

On a ainsi montré que **tous les entiers (sauf ceux de la forme 2^q) sont des nombres trapézoïdaux** avec, en bonus, une méthode pour trouver une décomposition possible.

Quelques exemples :

$N = 36$: On a $N = 4 \times 9$ avec $p = 4$ et $i = 9$. On a $i \geq 2p-1$, on pose donc $k = 2p = 8$ et $n = \frac{i-2p+1}{2} = 1$. On peut donc vérifier que $1+2+3+4+5+6+7+8$ fait bien 36.

$N = 54$: On a $N = 6 \times 9$ avec $p = 6$ et $i = 9$. On a $i \leq 2p - 1$, on pose donc $k = i = 9$ et $n = \frac{2p-i+1}{2} = 2$. On peut donc vérifier que $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ fait bien 54.

• Pour étudier le cas $N = 2015$, il est possible d'écrire un algorithme afin de déterminer toutes les combinaisons possibles.

Comme plus haut, j'appellerais n le plus petit entier et k le nombre d'entiers que l'on ajoute.

Une idée d'algorithme possible est la suivante :

On va, en partant de l'entier n, ajouter les entiers successifs tant que la somme obtenue est inférieure strictement à 2015. Si celle-ci n'est plus inférieure, on a alors deux possibilités :

- ☞ Soit la somme est strictement supérieure à 2015 et il n'y aura pas de solution pour ce n : on recommencera avec un n suivant.
- ☞ Soit la somme est égale à 2015 et on a une solution que l'on peut afficher.

L'algorithme en pseudo-code :

```
Déclarations des variables :
    N, somme, n, k, nbSolutions sont des entiers
Traitement :
    N = 2015
    nbSolutions = 0
    Pour n allant de 1 à N
    DébutPour
       somme = n
       k = 0
       Tant que somme < N
       DébutTantQUe
             k prend la valeur de k + 1
             somme prend la valeur de somme + n + k
       FinTantQUe
       Si somme = N
       DébutSi
             nbSolutions prend la valeur de nbSolutions + 1
             Afficher (« Solution n° », nbSolutions, « On commence à », n, « et on
                       ajoute »,k+1 , « termes »)
       FinSi
    FinPour
```

En langage Python, cela donne :

```python
N = 2015
nbSolutions =0
for n in range(1,N):
    somme = n
    k = 0
    while somme<N:
        k = k + 1
        somme = somme + n + k
    if somme==N:
        nbSolutions = nbSolutions + 1
        print('Solution n°',nbSolutions,': On commence à',n,'et on
              ajoute',k+1,'termes.')
```

qui, une fois exécuté, donne :

Solution n° 1 : On commence à 2 et on ajoute 62 termes.
Solution n° 2 : On commence à 50 et on ajoute 31 termes.
Solution n° 3 : On commence à 65 et on ajoute 26 termes.
Solution n° 4 : On commence à 149 et on ajoute 13 termes.
Solution n° 5 : On commence à 197 et on ajoute 10 termes.
Solution n° 6 : On commence à 401 et on ajoute 5 termes.
Solution n° 7 : On commence à 1007 et on ajoute 2 termes.

Il est bien sûr possible d'améliorer l'algorithme, le but, ici, étant seulement de montrer une manière d'utiliser l'outil informatique afin de résoudre un problème. (Une amélioration possible est de ne pas tester les entiers n de 1 à N mais de 1 à N//2 puisqu'il faut au moins faire la somme de deux entiers).

Olivier Rochoir